Глава 2.

Кружок с мальчиками — первый год

Как я уже упоминал неоднократно, я начал вести кружок в марте 1980 года, но записывать содержание занятий стал только с февраля 1981 года. Первые 20 занятий «для вечности» утеряны, тут уж ничего не поделаешь; собственно дневник начинается с 21-го занятия.

Важное пояснение. К каждому из занятий предпослан заголовок; но его не следует воспринимать слишком серьезно. На занятии обычно бывало несколько разных задач, а заголовок отражает лишь одну из них, чаще всего основанную на новой идее или примечательную по какой-то иной причине. Иногда, впрочем, он связан вообще не с задачей, а с каким-то происшествием или новым поворотом событий.

Занятие 21. Лист Мёбиуса

4 февраля 1981 (среда) $10^{30} - 11^{00}$ (30 мин.)
(Дима, Петя, Женя, Андрюша)

Задание 1. На их глазах разрезал лист на 4 полоски, из которых мы склеили (с моей помощью) 4 листа Мёбиуса.

> Для читателя-нематематика должен пояснить, что такое лист Мёбиуса. Если взять узкую длинную полоску бумаги и склеить ее концами «обычным способом», то получится цилиндр: он показан на рис. 2.1 слева. Если же предварительно перевернуть один из концов на 180°, получится фигура, показанная на том

же рисунке справа. Она и называется листом Мёбиуса. У цилиндра есть две поверхности — внешняя и внутренняя; их можно, например, покрасить в два разных цвета. А вот у листа Мёбиуса только одна поверхность. Попробуйте закрасить каким-нибудь цветом его внутреннюю сторону — и вы незаметно перейдете на внешнюю.

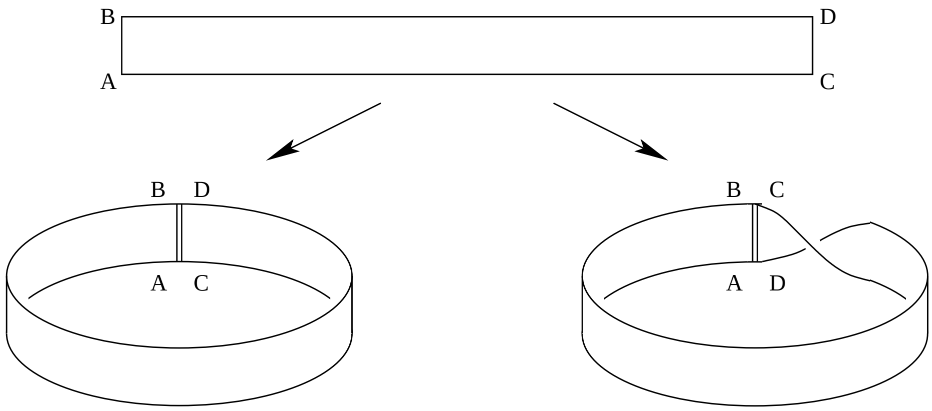

Рис. 2.1. Два способа склеить концы бумажной полоски. Слева — обычный цилиндр, справа — лист Мёбиуса.

Себе склеиваю обычный цилиндр (для сравнения). Два муравья соревнуются — у кого домик интереснее (или кто сумеет то-то и то-то).

На одном из листов (Диминoм) показываю, как муравей полз по одной стороне, а попал на другую. На другом (Женином) показываю, как муравей полз по краю и оказался на другом краю.

[Надо было более медленно и спокойно дать им убедиться (каждому на своем листе), что есть всего одна сторона и всего один край.]

Разрезаю по средней линии цилиндр, затем лист Мёбиуса. Оба раза прошу угадать, что получится. Потом полученную штуку снова разрезаю по средней линии, опять прошу угадать.

[Во второй раз вместо средней линии можно резать на расстоянии 1/3 ширины от края: в этом случае зацепление лучше видно.]

Показываю шарик, как он склеен из двух половинок; объясняю, что край исчезает. Потом показываю, как из двух резиновых трубок склеивается тор (у него тоже нет края). Рассказываю, что будет, если склеить два листа Мёбиуса по краю (края не будет, но можно перейти с внешней стороны на внутреннюю). Впечатления не производит. Рассказываю про молоко, которое было внутри, а стало снаружи. «Ну и что? Просто пролилось».

[Надо было сказать, что при этом оно нигде не переливалось через край, так как никакого края вообще нет.]

Задание 2. Сколько стоит билет в метро, в автобусе, в троллейбусе, в трамвае?[1] Какие автоматы стоят в метро? (Принимают только пятаки и пропускают внутрь. Билетов в метро не бывает.) Какие автоматы бывают в автобусе? (Пять копеек в любом наборе — билет.)

Теперь нам с вами надо сложить пять копеек самыми разными наборами. (Монеты выкладываются на стол отдельными кучками. Чтобы один участник мог выложить 5 копеек всеми возможными способами, ему потребуется

$$1 \times 5\,\text{коп.} + 2 \times 3\,\text{коп.} + 4 \times 2\,\text{коп.} + 11 \times 1\,\text{коп.}\,)$$

Задание было выполнено менее успешно, чем я ожидал (долго не понимали, что требуется; ошибались в счете; повторяли уже имеющиеся комбинации; зацикливались на определенной группе монет; не могли найти нужную монету, так как искали в одной и той же кучке: «А мне все единички попадаются!»).

◁ По моему, я видел, что Жене «всё единички попадаются» из-за того, что он ищет не в той кучке. Я не знал, говорить ему или нет, и эта мысль отвлекала столько внимания, что я не замечал, что сам не могу найти нужную монету по той же причине. — Дима. ▷

[Надо было начать с трамвая, потом перейти к троллейбусу и уже потом к автобусу. Еще лучше — начать с телефонного автомата (2 копейки).]

Занятие 22. Что больше, целое или часть?

14 февраля 1981 (суббота) $10^{35} – 11^{20}$ (45 мин.)
(Дима, Женя, Петя, Андрюша)

Задание 1. Вопрос Диме: «Чего больше — зайцев или зверей?» Ответ: «Зверей». — «Почему?» — «Потому что *кроме зайцев* (выделено мной) бывают еще попугаи, волки, кошки, собаки и т. д.» (Обсуждение того, что попугаи — не звери.) Я даю свое объяснение: «Ведь зайцы — это тоже звери».

Вопрос Андрюше: «Чего больше — гусей или птиц?» Андрюша объясняет, что больше птиц, так как они водятся повсюду — в Индии, в Грузии и даже на Северном полюсе. Таким образом, заимствована внешняя схема

[1] Боюсь, что читатели уже забыли, сколько стоили билеты в ту эпоху: автобус и метро — 5 копеек, троллейбус — 4 копейки, трамвай — 3 копейки.

Диминого ответа (что разных птиц очень много), но пропущен центральный момент: «кроме». Я: «Но ведь гусей тоже очень много (рассказываю, где водятся гуси). Может быть всё-таки гусей больше, чем птиц?» — Андрюша не знает.

Вопрос Жене: «Чего больше — мужчин или людей?» Женя считает, что больше людей, но объяснить не может. Правильно объясняет Дима: «Потому что мужчины — это тоже люди. Это двойные люди». (Обсуждение, являются ли дедушки и папы мужчинами).

Вопрос Пете: «Чего больше — мух или насекомых?» — «Мух». — «Почему?» — «Потому что они повсюду летают». — «А насекомые не повсюду?» — «Нет». — «А мухи — это тоже насекомые или нет?» — «Насекомые». (Снова обсуждение того, что не все насекомые умеют летать). Таким образом, правильно отвечал только Дима. Но, как показало четвертое задание, и он понятие включения классов еще до конца не освоил.

Задание 2. Продолжение вопросов (в третий раз) про мальчиков и девочек в очках и без очков — еще четыре вопроса, по одному на каждого из ребят.

> В этой задаче детям предлагаются карточки, на которых нарисованы мальчики и девочки, причем некоторые из них в очках, другие без очков. Требуется ответить, правильны или нет утверждения типа «все дети в очках — мальчики», «имеется девочка без очков» и т. п. Любой из этих вопросов (которых можно сочинить немало) можно задавать про любую карточку, так что эта задача весьма изобильна, ею можно заниматься долго.

Петя заметил, что у него и у Жени оказались одинаковые картинки, Е и Г. Алла подсказывает, что и утверждалось одно и тоже: «нет ни одной девочки без очков» и «все девочки — в очках» — это эквивалентные утверждения. Андрюша справлялся с заданием слабее других и всё время объяснял что-то про мальчиков, хотя его вопрос был о девочках. Причина в том, что он не был на тех занятиях, когда это задание было первые два раза.

Самостоятельно (т. е. без моей помощи) справился с заданием один Дима. Но у него и вопрос был легче: про всех детей, а не про мальчиков или девочек.

Снова немного пообсуждали проблему пустого множества. [Это вот о чём: спрашивается, верно ли для данной картинки, что «все девочки — в очках», а девочек на ней вовсе нет. Ребята, совершенно естественно, отвечают, что, мол, нет, неверно. «Ах, вот как? — говорю я. — Тогда покажите мне девочку без очков». — «Но здесь вообще нет девочек!» — «Вот я и говорю, что все, которые есть — в очках». — «Но их нет никаких!» — «А я и не говорю, что есть...» И дальше в том же духе.]

Смешная сценка вначале: когда я только вынул карточки, все, перебивая друг друга, закричали, показывая на них: “Blue! Yellow! Brown! Grey!” Я, воспользовавшись моментом, спросил: “Is it a boy or a girl?” — “It’s a boy”. (Андрюша шутит.) — “No, Andrew, that’s not true. It’s a girl”.[2]

Задание 3. Все дети получают по карточке вроде той, что показана на рис. 2.2 (все карточки разные). Нужно догадаться, какой фигурки не хватает.

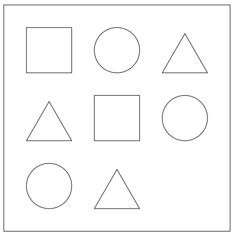

Рис. 2.2. Какой фигурки не хватает?

Первым догадывается Андрюша. Я спрашиваю, как он догадался, он объясняет. Услышав это, все остальные тоже решают задачу, но Дима решает неправильно (кажется, Женя решил сам, без подсказки). Я указываю Диме ошибку: «Смотри, здесь в каждом ряду есть все три фигурки, а в тех, которые ты нарисовал, квадратиков два, а треугольника вообще нет». Мы еще раз обсуждаем общий принцип построения узора. Дима исправляет ошибку.

Теперь каждый получает еще по одной такой же карточке, но пропущена фигурка не а правом нижнем углу, а в более трудном месте (например, в центре). В третий раз каждый получает карточку, на которой нарисованы только 4 фигурки из 9, а оставшиеся 5 надо дорисовать самостоятельно (рис. 2.3). С обоими заданиями все четверо справились безукоризненно.

Задание 4. Кладу перед детьми вырезанный из ватмана треугольник, спрашиваю, как называется эта фигурка и почему. Потом последовательно предъявляю четырехугольник (неправильной формы), прямоугольник, квадрат, пятиугольник. Дети называют. «А как отличить прямоугольник?» —

[2]Все наши мальчики занимались английским языком. Уроки английского им давала Алла, и порой мы использовали одни и те же картинки.

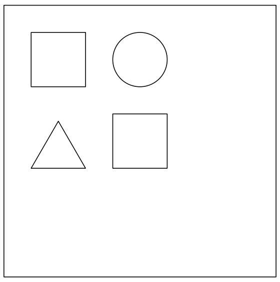

Рис. 2.3. Дорисовать недостающие фигурки. В каждой строке и в каждом столбце все фигурки должны быть разными (и все три типа должны присутствовать).

Дима: «У него все углы прямые». (Мы с Димой отдельно читали «Геометрию для малышей»[3], и он уже знает про прямые углы.) — «А можно его назвать четырехугольником?» — «Нет». — «Почему же? Посчитайте, сколько у него углов». — «Четыре». — «Ну вот, значит, он тоже четырехугольник. У него два имени: четырехугольник и прямоугольник. Прямоугольник — это четырехугольник, но особенный, с прямым углом». Затем то же повторяется с квадратом. «А можно его назвать прямоугольником?» — «Нет». — «Почему?» — Дима: «Потому что он не такой длинненький». Следует аналогичное обсуждение: я объясняю, что квадрат можно называть тремя именами, и все будет правильно.

«А скажите теперь, чего больше: квадратов или прямоугольников?» Все: «Квадратов!» — «Почему?» — Дима: «Потому что их легче вырезать». Я отступаю.

[В этом месте надо было положить все фигурки на стол и попросить посчитать, сколько квадратов, сколько прямоугольников и сколько четырехугольников.]

Следующей фигуркой даю невыпуклый восьмиугольник (рис. 2.4).

Только один Женя правильно подсчитывает количество углов, остальные не учитывают вмятин. Объясняю, что надо учитывать. Дима: «А разве это углы? Это же дырки... угольные».

Раздаю всем по одному четырехугольнику неправильной формы (потом еще по одному и т. д.); четырехугольники все одинаковые. Серия заданий:

[3] В. Г. Житомирский, Л. Н. Шеврин «Геометрия для малышей» (М.: Педагогика, 1975). К тому же жанру можно отнести книги Л. Л. Сикорук «Физика для малышей» (М.: Педагогика, 1983) и Е. П. Левитан «Малышам о звездах и планетах» (М.: Педагогика, 1986). Мне больше всех понравилась «Физика» Сикорука. Все три книги превосходно иллюстрированы. Не знаю, переиздавались ли они с тех пор.

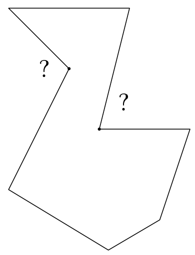

Рис. 2.4. Восьмиугольник или нет?

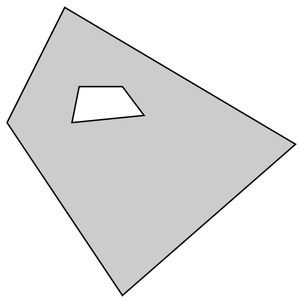

Рис. 2.5. Что это? Четырехугольник?

нужно провести карандашом линию и, разрезав по ней, получить из четырехугольника:

(а) два треугольника;

(б) два четырехугольника;

(в) четырехугольник и треугольник;

(г) пятиугольник и треугольник.

Безукоризненно выполнил все четыре пункта только Андрюша. Остальные иногда ошибались, иногда смотрели решения друг у друга.

Для пункта (б) Дима выдал неожиданное решение: вырезал четырехугольник внутри, а снаружи тоже остался четырехугольник, хотя и с дыркой (рис. 2.5).

Я чуть было по инерции не заявил, что решение неправильное, но вовремя остановился, поняв, что такую оригинальную идею надо не губить, а, наоборот, поддержать. Вдохновленный, Дима пошел по проторенной дорожке и решил точно так же пункт (в), вырезав треугольник внутри четырехугольника, после чего безуспешно пытался решить тем же методом задачу (г), и в результате так ее и не сделал.

В конце занятия возник небольшой сумбур и путаница, мальчики чуть было не подрались из-за ножниц (их было всего две пары), да и времени прошло уже много, так что я занятие прекратил, так и не обсудив до конца со всеми вместе пункты (в) и (г).

Андрюша захотел все свои бумажки взять с собой, а с его легкой руки и все остальные тоже захотели.

Занятие 23. Ханойская башня

28 февраля 1981 (суббота) $10^{40} - 11^{15}$ (35 мин.)
(Дима, Женя, Петя, Андрюша)

Задание 1. Устные вопросы на транзитивность.

Андрюше: «Один мальчик любит мороженое больше, чем орехи, а орехи больше, чем апельсины. Что он любит больше — мороженое или апельсины?» — «Мороженое». — «Почему?» — «Потому что он раньше начал есть мороженое». — «Ему что, раньше разрешили, что ли?» — «Да».

Диме: «У дедушки денег больше, чем у папы, а у папы больше, чем у мамы. У кого больше денег — у дедушки или у мамы?» — «У дедушки». — «Почему?» — «Я знаю, что дедушка больше зарабатывает, чем мама». — «Откуда ты это знаешь?» — «Ну просто знаю, и всё». — «Но ты это знаешь из задачи или из жизни?» — «Из жизни».

Жене: «Сосна выше елки, а елка выше березы. Что выше — сосна или береза?» — «Сосна». — «Почему?» — Не помню, что ответил Женя, но тут встрял Дима и сказал: «Потому что сосна самая большая, а береза самая маленькая. А елка самая средняя». — Все обсуждают, так ли это в жизни, показывают жестами. (Вспомнил, что сказал Женя: «Сосна раньше начала расти, чем береза». Может быть, мой вопрос «почему?» они воспринимают как требование объяснить, «почему так произошло, что...?» Отодвигая в сторону логику, из которой следует, что сосна выше березы, объяснить, почему так получилось, что она выше.)

Пете: «В кастрюле помещается больше воды, чем в чайнике, а в чайнике больше, чем в кувшине. Где помещается больше — в кастрюле или в кувшине?» — «В кастрюле». — «Почему?» Опять вмешивается Дима, и они вместе с Петей всё правильно объясняют.

[Надо попробовать неправдоподобные условия: например, «Женя[4] больше Димы, а Дима больше папы. Кто больше — папа или Женя?»]

[4]Здесь имеется в виду Женя — младшая сестренка Димы; ей в этот момент чуть больше года.

Задание 2. Снова, как и в прошлый раз, на столе квадрат, прямоугольник и четырехугольник. Вспоминаем их названия, прошу посчитать, сколько на столе квадратов (один), прямоугольников (два), четырехугольников (три). На последний вопрос правильно отвечает один Петя. Наконец, итоговый вопрос: «Чего больше — квадратов или четырехугольников?» Тот же результат: «Квадратов» (потому что их много в домах, на крыше, на трубе и т. п.). Я ничего не объясняю, только спрашиваю, являются ли квадраты четырехугольниками. Ответ: «Да».

Задание 3. Из «математического набора первоклассников» выбрано 16 предметов (число, кратное четырем — количеству участников): 2 синих кружочка, 2 желтых квадрата, 3 красных квадрата, 4 красных треугольника, 5 зеленых треугольников. На стол кладется кру́гом веревка, связанная концами. Я даю каждому по очереди по одной фигурке — нужно, чтобы красные лежали внутри веревки, не красные — снаружи.

Веревка убирается, но кладется другая, точно такая же. Теперь нужно внутрь класть треугольники, а наружу — не треугольники. Снова все справляются (Андрюша делает одну ошибку).

Наконец, на столе обе веревки, но пока я кладу их непересекающимися. Требуется выполнить оба задания одновременно. После первого прохода я подсовываю Диме (впервые) красный треугольник. Он, не задумываясь, кладет его в красные. Я обращаю внимание всех на конфликт между условиями, говорю, что это задача для всех.

[Опять спешка! Надо было дождаться конца и потом обсудить, всё ли верно.]

Андрюша: «А это нарочно так придумано?» Я: «Конечно, нарочно. До сих пор была только подготовка, а настоящая задача началась сейчас. Нужно что-то придумать, изобрести, чтобы этот треугольник лежал и тут, и тут». Дима пытается положить треугольник в виде мостика на обе веревки. Я: «А может быть, передвинуть как-нибудь веревки?» Андрюша первый догадывается, что нужно положить веревки одну на другую. (Кажется, Дима тоже догадался, но не успел сказать.)

Теперь задача решена и легко доделывается до конца (каждый по одному разу получает красный треугольник, так как их всего 4). На черном фоне стола белые веревки и разноцветные фигурки выглядят очень красиво. Я обращаю внимание ребят на этот факт.

Андрюша: «Это была моя идея!» Дима: «Нет, моя!» Я еще пытался что-то сказать о том, что красные треугольники принадлежат сразу двум классам, но без эффекта.

Задание 4. Ханойская башня. Каждый получает экземпляр игры, я объясняю правила.

> Эта игра — настоящая жемчужина программистской литературы; в нее можно играть с пятилетними, но и пятикурсникам-информатикам тоже найдется над чем подумать. В начальной позиции несколько кружков разных размеров уложены друг на друга, образуя башню. Башня стоит на одном из трех полей (рис. 2.6).

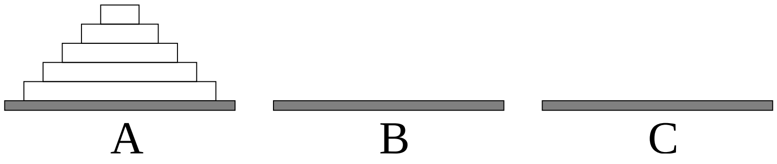

Рис. 2.6. Ханойская башня в начальной позиции.

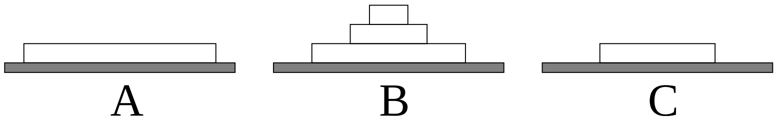

Рис. 2.7. Башня в одной из промежуточных позиций. В конце игры она должна полностью переместиться на одно из соседних полей — либо на B, либо на C.

> Цель игры — переставить башню на другое поле, соблюдая следующие правила:
>
> (а) кружки переставляются только с поля на поле; при этом они кладутся друг на друга, так что получаются маленькие башни; нельзя откладывать кружок куда-то в сторону;
>
> (б) при каждом ходе передвигается только один кружок — несколько кружков одновременно переносить нельзя; в частности, запрещено брать по кружку в каждую руку;
>
> (в) можно брать кружок лишь с вершины какой-нибудь башни и класть его только на вершину другой башни; иными словами, нельзя брать кружок из середины башни, и нельзя вставлять его в середину другой башни (чтобы сделать это правило более явным, кружки часто изготовляют с отверстиями в центре, и каждую башню надевают на стержень);

(г) наконец — и это очень важно — запрещено класть больший кружок на меньший.

Игру изобрел в конце XIX века французский математик Эдуард Люка. Он же украсил ее такой романтической легендой.

> *Где-то в непроходимых джунглях недалеко от Ханоя есть монастырь Брамы. В начале времен, когда Брама создавал мир, он воздвиг в этом монастыре три высоких алмазных стержня и на один из них возложил 64 диска, сделанных из чистого золота. Он приказал монахам перенести эту башню на другой стержень (с соблюдением всех правил, разумеется). С того времени монахи работают день и ночь. Когда они закончат свой труд, наступит конец времен.*

Отдельная задача для более старших детей — оценить хотя бы приблизительно, когда наступит этот самый «конец времен».

[Указание: чтобы переставить башню из n дисков, требуется $2^n - 1$ операций. Пусть, например, одна операция занимает одну секунду. Сколько времени потребуется для перестановки всей башни при $n = 64$?]

Оказалось, что в процессе работы очень трудно проследить за всеми; мальчики постоянно нарушали правила.

Дима уже два раза играл в эту игру, поэтому справляется первый и правил не нарушает. Под конец, когда все были в тупике, они, затаив дыхание, следили за его быстрыми и уверенными движениями.

Петя никак не мог осознать правила и нарушал их до самого конца, хотя ему помогали и я, и Дима, и Наташа[5]. На Диму он злился за подсказки.

Женя правила осознал, но действовал крайне неуверенно. Почти всё время просидел со снятыми двумя верхними фишками, не зная, что делать дальше. Наташа, Дима и я ему помогали. На Диму он злился, говоря, что у него не получается из-за того, что Дима мешает. Дима над ним издевался, говорил, что он нарочно помогал Пете, чтобы Петя закончил раньше Жени

[5]Наташа — мама Жени; упоминаемая ниже Люда — мама Андрюши. Родители почти всегда присутствовали на занятиях — ведь занятия длились недолго, а детей надо было потом забирать и уводить домой. С одной стороны, меня это довольно сильно сковывало: я никогда не чувствовал себя на кружке полновластным хозяином ситуации и не мог дать волю эмоциям; с другой — служило к росту моей «славы»: родители ранее и не подозревали, что математикой можно заниматься так интересно и разнообразно.

и Андрюши, что все уже погуляют, а Женя всё еще будет сидеть и т. п. Пришлось сделать ему довольно резкое замечание.

Андрюша, за которым я недоглядел, переставил свою башню очень быстро, быстрее, чем смог бы я сам. Я попросил его повторить, но он, поняв, что, видимо, сделал что-то не так, категорически отказался, сказав, что он решил задачу первым, и что второй раз он повторять не будет. Я сказал: «Я думаю, Андрюша, что ты нарушал правила». — «Когда?!» — нагло заявил Андрюша, понимая, что я не смогу его уличить, так как ничего не видел. Но тут его выдала Люда. Андрюша очень расстроился. Люда его утешала, стала показывать, как играть по правилам, но в итоге всё сделала сама. После того, как закончил Петя, Андрюша сказал: «А Пете очень много подсказывали», — явно забыв, что сам вообще не справился с задачей. Он тоже пытался издеваться над Женей.

Мой недостаток — я реагирую на такое поведение так, как будто оно исходит от взрослых, а не от маленьких детей. Принцип «ругать поступок, а не ребенка» теоретически мне знаком, но практика сильно отстает. Самое главное то, что у меня самого портится настроение, и это отражается на общей атмосфере гораздо сильнее, чем детские глупости.

Занятие 24. Немножко топологии

7 марта 1981 (суббота) 10^{35} – 11^{10} (35 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Вопросы на транзитивность с невозможными условиями.

Диме: «Жили были девочка Женя, мальчик Дима и папа. Женя была больше Димы («Ой!»), а Дима — больше папы. Как ты думаешь, кто больше: Женя или папа?» (Смех.) Отвечает правильно: «Женя больше, ведь она самая большая. Она ведь больше Димы, а Дима сам больше папы».

Жене: «Однажды червяк, велосипед и самолет стали соревноваться, кто из них умеет быстрее бегать. Оказалось, что червяк бегает быстрее, чем велосипед, а велосипед быстрее, чем самолет. Как ты думаешь, кто быстрее: червяк или самолет?» Женя отвечает правильно, но долго не решается что-нибудь сказать (качается взад-вперед, падает на диван, хихикает). Я его тороплю, Наташа тоже вмешивается, но это не помогает. Оказывается, его смущало то, что самолет не бегает, а летает.

Пете: «Жили на свете три мальчика: Дима, Петя и Андрюша. Дима был старше Пети, а Петя старше Андрюши. Кто старше: Дима или Андрюша?» Петя отвечает и объясняет правильно.

[Замечание. С некоторой натяжкой можно считать, что такие вопросы представляют собой пример *познавательного конфликта* по Яну Смедслунду. То есть, нужно выбрать одно из двух противоположных объяснений. Если муравей тяжелее собаки, а собака тяжелее слона, то вывод о том, кто тяжелее всех, можно сделать: (а) на основе житейских соображений (очевидно, что слон тяжелее, так как он очень большой, а муравей маленький); (б) на основе транзитивности, то есть исходя из условий задачи. Может быть, потому юмор и стимулирует развитие интеллекта, что создает нечто вроде познавательного конфликта. Впрочем, натяжка здесь довольно велика: ведь дети сразу понимают, что нужно говорить «всё наоборот».]

Задание 2. Топологические закономерности (на основе классификации 8 карточек на 4 и 4).

Я напоминаю игру «четвертый — лишний». Объясняю, что сейчас будет не один лишний, а надо разделить карточки на две равные кучки (заодно спрашиваю, сколько будет 8 поделить на 2).

Наборы такие (противопоставления):

(1) выпуклые — невыпуклые (это не топологическое, а геометрическое свойство), все гомеоморфны окружности;

(2) одна фигурка — две фигурки;

(3) всегда две фигурки, но 4 раза одна внутри другой, а 4 раза — снаружи;

(4) 8 топологических окружностей, четыре из них с торчщими «усами»;

(5) 8 окружностей, из четырех торчат по 2 уса, из остальных четырех — по 3 уса;

(6) на каждой карточке — две похожие по форме фигурки, одна внутри другой, соединенные мостиками; мостиков либо два, либо три.

Большие трудности вызвали задачи 3 и 6, задача 5 оказалась средней трудности, остальные решались мгновенно.

Проблема другого рода: как только карточки появлялись на столе, мальчишки норовили сразу, еще толком ничего не разглядев, утащить побольше карточек себе. То и дело возникали конфликты, карточки мялись, я раздражался, и, главное, ничего толком нельзя было разглядеть. В конце концов пришлось навести строгий порядок и вообще запретить трогать карточки, пока не указано решение и я его не одобрю.

Легкие задачи (1, 2 и 4) решал, как правило, Петя. Они с Димой были наиболее активны, но Петя ориентировался быстрее. Жене уже ничего не доставалось. Дима изобретал множество «объяснений», но часто довольно вычурных, и не всегда помнил об условиях задачи (например, вместо разбиения $4+4$ предлагал $2+6$).

Задачи 5 и 6, более трудные, после всеобщего тупика решил Женя. Надо сказать, что и задачи на «четвертый лишний» он решал тоже очень хорошо. Мне большого труда стоило набраться терпения его выслушать (как только внимание обращено непосредственно к нему, он замолкает) и оградить его карточки от Димы и Пети.

Задачу 6 Дима решил иначе, чем было мной задумано: разделил все фигуры на прямолинейные и криволинейные. Мне пришлось согласиться. После этого он протестовал против дальнейших попыток решить задачу другим способом, так что у нас даже состоялся неприятный разговор о том, что кружок не для него одного, а для всех.

В задаче 3 мне пришлось самому подсказать решение. Я сказал, что все их закономерности, которые они предлагали (особенно Дима), очень сложные, а я могу объяснить всё очень просто, сказав всего два слова. Одно слово скажет, что положить в одну кучку, а другое — что в другую. И потом сказал эти слова: «внутри» и «снаружи».

Задание 3. Ханойская башня (второй раз).

Дима кончил первым. Женя (при моих примерно пяти подсказках) справился вторым и очень этому радовался, прыгал на месте и дрыгал ногами. Петя снова делал всё подряд по подсказкам Димы (у него эта игра почему-то не идет), только первые ходов 5—6 и последние два хода сделал сам.

◁ Я пытался ему не дать, чтобы потом говорить, что всё сделал за него. — Дима. ▷

Кроме перечисленных трех заданий планировалось еще одно — на множество и его подмножества, но не хватило времени. Может, это и к лучшему, а то было бы сегодня слишком много задач на карточках.

Занятие 25. Мальчик в лифте

14 марта 1981 (суббота) $10^{40} – 11^{00}$ (20 мин.)
(Дима, Петя, Женя, Андрюша)

Занятие длилось 20 минут, так как Женя опоздал, а я торопился — мне надо было уйти не позже 11^{00}.

Задание 1. Одному маленькому мальчику, который жил на 16 этаже, мама разрешала самому ездить на лифте. Но ездил он как-то странно: когда ехал вниз, то доезжал с 16 до 1 этажа, а когда ехал вверх, то доезжал почему-то только до 8 этажа, а дальше шел пешком. Чем вы можете это объяснить?

— Это у него привычка такая была, — сказал Андрюша.

— Это он тренировался.

И так далее.

— А когда он немножко подрос, то стал ездить до 10 этажа, а уже дальше шел пешком.

— Наверное, он стал более ленивый, — сказал Дима.

— Но ведь в задаче не сказано, что он был ленивый или не ленивый, и хотел он тренироваться или нет. Сказано только, что он был маленький.

— Ну и что?

Андрюша резюмирует:

— Просто у него такая привычка была, и всё.

Я оставляю эту задачу на дом.

[Я надеялся, что им, исходя из их жизненного опыта, будет легко решить эту задачу, но не тут-то было.]

Задание 2. На блюдце — фишки 4 цветов, по 13 штук каждого цвета (одна большая и 12 маленьких). Я начинаю рассказ: «Жили были четыре армии — красная, синяя, зеленая и желтая. Вот это — их полководцы (бóльшие фишки), а остальные — солдаты. Давайте построим армии!»

Мы строим каждую армию в ряд вслед за полководцем. Ряды получились неодинаковые по длине. Спонтанно, без моей инициативы, возникает дискуссия о том, где солдат больше. Андрюша находится на интересной промежуточной стадии: первоначально он сказал, что больше солдат в более длинном ряду (опираясь только на длину), но потом, когда я раздвинул короткий ряд и сделал его более длинным, он продолжал утверждать, что там, где было больше, там и осталось больше. Я, по свойственному мне отсутствию гибкости, не дал дискуссии развернуться, а пошел дальше излагать задачу.

Я продолжаю: «И вот эти армии всё время воевали друг с другом, и в конце концов им это надоело, и они решили заключить мир и в честь этого устроить великий пир. Они расставили столы (я раскладываю квадратики из ватмана), и за каждый стол село четыре воина, по одному каждого цвета. Но только садиться они должны были так, чтобы за каждым столом они сидели по-другому — такое было правило: только тогда мир будет прочным и они не будут больше воевать».

Я сам рассаживаю полководцев, потом все сразу хватают себе фишки и начинают расставлять (хотя я задумал работу по очереди). После этого поиск совпадений происходит довольно сумбурно. Первым находит совпадающие расположения Петя. Когда обнаруживается совпадение, они тут же одну из расстановок меняют, не задумываясь о том, что может снова получиться совпадение с каким-то другим столиком. Иногда (не без помощи

Наташи) происходит путаница в постановке задачи — а именно, отождествление расстановок, полученных друг из друга поворотом.

[Замечание: всего возможны $4! = 24$ расстановки, но это для детей слишком много. Я выбрал 12 фишек исключительно из тех соображений, что ребят будет либо трое, либо четверо, а фишек должно хватить на всех поровну.]

Дополнение. Во вторник Алла предложила Диме доехать в лифте до 16 этажа. Он не достал до кнопки, после чего сам вспомнил задачу и понял решение. То же с Андрюшей: ему и подсказка не потребовалась, так как он и без того живет на 14 этаже.

$\triangleleft$ На занятии мне не приходило в голову представить себе, как мальчик входит в лифт, протягивает руку к кнопке и т. д. Тем более я не пытался представить себя на месте мальчика. — Дима. $\triangleright$

Занятие 26. Пересекающиеся классы

21 марта 1981 (суббота) $10^{35} - 11^{00}$ (25 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Классификация с пересечением.

(1) Я предлагаю ребятам набор из 5 карточек (бабочка, ворона, самолет, поезд, корабль) и прошу отобрать те из предметов, которые умеют летать. Затем мы собираем карточки обратно в кучу, и я прошу отобрать средства транспорта (то, на чём люди путешествуют). Возникает спор о самолете. Дима считает, что его надо оставить с летающими предметами (чтобы разбиение было на непересекающиеся классы), Петя тащит к средствам транспорта. Женя подводит итог спору: «Он общий!» Я хвалю Женю за найденное им удачное слово и спрашиваю (без всякой надежды на успех), на какую задачу это похоже. Неожиданно Дима правильно отвечает: «На красные треугольники». Я приятно удивлен, хвалю Диму и достаю веревочки. Женя пытается положить карточку с самолетом на две веревки (как когда-то пытался Дима), но Дима и Петя заявляют: «Не так!» — и делают всё как надо. Последующие наборы ребята раскладывают в веревки сами, не дожидаясь, чтобы я объявлял классы, хотя я сам думал, что это потребуется.

(2) Набор: яйцо, рыба, гриб, елка, цветы. Справляются сразу: «Вот это всё едят, а вот это всё растет». Петя сразу кладет гриб в серединку.

(3) Набор: голубь, сорока, страус, жираф, ящерица. Произошел казус: я по ошибке положил вместо картинки страуса картинку журавля, да к тому же, оговорившись, назвал его аистом. Приходится картинку перевернуть

рубашкой вверх и считать страусом. Я публично признаюсь в ошибке. Алла, пользуясь случаем, рассказывает про птицу по имени коростель-дергач, которая водится у нас и тоже не умеет летать, но проходит пешком сотни километров на зимовку.

[Вообще-то определять классы через отрицание («*не* умеет летать») не следует, но набор картинок ограничивает. В дальнейшем надо будет картинки заказывать Алле.]

(4) Набор: маленькая девочка, две маленькие девочки, маленький мальчик, мужчина, старик. Задача вызывает неожиданные трудности: Дима сразу кладет в середину старика со словами: «Это хоть и дядя, но похож на тетю». (На картинке изображен лысый старик с огромной бородой.) В итоге после многих проб задачу решает Петя.

Задание 2. Ребята получают карточки, на которых нарисованы некоторые множества предметов (цветок, карандаш, буква «А» и т. п., а также и по несколько предметов на одной карточке). Карточки кладутся на большой лист серой бумаги. Требуется показать стрелками отношение «Это моя часть» (т. е. подмножество). Среди карточек присутствует также и пустое множество.

Главная трудность — дети безжалостно относятся к чистым, аккуратным и красивым карточкам и всё норовят начать рисовать свою толстенную фломастерную стрелку прямо с карточки. Несколько карточек, несмотря не все меры предосторожности и многократные предупреждения, оказались измазанными.

Дима первым догадался провести стрелку от одного из множеств к пустому, но никак не мог догадаться провести такие же стрелки от остальных множеств.

Вообще, хотя ребята с заданием вполне справились, у меня почему-то осталось ощущение, что они не очень понимали, что делали.

Занятие 27. Четырехугольники на мозаике

4 апреля 1981 (суббота) $10^{35} - 11^{10}$ (35 мин.)
(Дима, Женя, Петя, Андрюша)

По-моему, Андрюше наши занятия изрядно поднадоели. Ему нужно соревноваться и побеждать, а у нас для этого очень мало возможностей. Заставлять его глупо, но просто взять и больше его не приглашать тоже нельзя. Вопрос в том, как сделать это тактично. Одна надежда — что Люда понимает эти проблемы лучше многих других[6]. По крайней мере, сегодня Андрюша в большой мере испортил нам занятие.

Задание 1. Перед занятием дети очень расшумелись, и, чтобы их успокоить, я предложил им досчитать до десяти и обратно очень тихим шепотом. Но допустил ошибку, сказав, что самым большим молодцом будет тот, кто будет говорить тише всех. В результате после окончания счета вместо ожидаемой тишины и сосредоточенности возникла склока о том, кто говорил тише.

Задание 2. Оно снова было на классификацию с пересечением. Поскольку ребята уже были с ним знакомы, я сразу положил на стол два пересекающихся веревочных кольца и начал преамбулу: «Помните, мы уже решали с вами задачи про общие элементы: с красными треугольничками, потом с карточками...» Но закончить мне не удалось: Андрюша, не дослушав, заявил: «А, нет, я не хочу делать то, что уже было, мне неинтересно». Я ответил: «Если неинтересно, можешь не делать, просто посиди посмотри». Тут Петя заявил: «Мне тоже неинтересно». (А ведь всего неделю назад он говорил Кате[7], что математика ему нравится больше рисования и больше английского. И аргумент привел неожиданный: потому что на рисовании и на английском мы играем, а на математике занимаемся серьезным делом. У любви как у пташки крылья...). Не придумав ничего иного, я и ему сказал то же, что Андрюше. Немного подумав, и Дима — моя надежда и опора — сказал: «Мне вообще-то тоже неинтересно, но я всё-таки буду решать». Я не стал дожидаться мнения Жени и сказал: «Ну, хорошо, для Димы и Жени вот набор карточек...», — но тут Андрюша увидел, что картинки на карточках совсем другие, то есть и задание не то, что было, и закричал: «А-а! Тогда я буду, буду!» — и попытался сразу схватить себе все карточки, а следом за ним и Петя закричал: «Я тоже буду!» Но настроение у меня уже испортилось, я был раздражен, тем более, что Андрюша не давал другим карточки, дрался с Женей и беспрерывно глупо и не к месту шутил, отвлекая всех от работы.

Мы успели рассмотреть три набора карточек (из подготовленных одиннадцати!):

(1) мяч, автомобильная шина, резиновые сапоги, пальто, шапка (три предмета из резины, три предмета одежды; общий элемент — резиновые сапоги);

(2) мяч, автомобильная шина, резиновые сапоги, погремушка, клоун (три предмета из резины, три игрушки; общий элемент — мяч);

---

[6] Люда, Андрюшина мама — преподаватель музыки.

[7] Катя — мама Пети.

(3) мяч, автомобильная шина, резиновые сапоги, руль, кузов (три предмета из резины, три части автомобиля; общий элемент — шина).

В целом ребята решали задачи хуже, чем в первый раз. У Димы все тот же дефект: он не умеет оставаться в рамках задачи, и его повышенная креативность лишена дисциплины. Так, в данном случае он упорно настаивал на том, что шина — это тоже «одежда», так как ее можно надеть на пояс. Мы его долго переубеждали, после чего он заявил: «Всё равно это одежда, потому что ее одевают на автомобиль». Первую задачу ребята не сделали, и мне пришлось показать ее решение самому. В остальных двух задачах окончательный расклад карточек принадлежал Диме, но Женя и Петя оба раза еще раньше говорили правильное решение устно.

Задание 3. Задачи на мозаике.

Диме: сложить треугольник (справился);

Андрюше: сложить квадрат (справился);

Жене: сложить прямоугольник (справился);

Пете: (говорю, что это задание — самое трудное): сложить четырехугольник, но не прямоугольник. Петя складывает шестиугольник; предлагаю сосчитать углы; Дима сразу заявляет, что углов — два, и показывает их (те, что выделены на рис. 2.8).

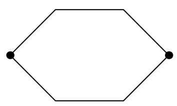

Рис. 2.8. Правда ли, что у этой фигурки всего два угла?

Женя кричит: «Неправильно!» — начинает сам правильно считать углы, но Дима, поняв свою ошибку и поняв, какие углы следует считать, отталкивает Женю и сам досчитывает до шести.

Диме переходит то же задание, что было Пете, он снова выдает нечто весьма неожиданное (рис. 2.9). Он говорит: «Это четырехугольник, потому что у него четыре угла», — и показывает углы (на рис. 2.9 выделены). Я его хвалю, говорю, что решение очень интересное, но что всё же нам нужна замкнутая фигура.

Андрюше — то же задание; он строит неправильной формы шестиугольник.

Жене — то же задание; Женя, наконец, находит правильное решение и строит параллелограмм с углом 45°.

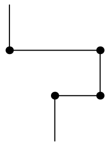

Рис. 2.9. Несколько неожиданный «четырехугольник».

На этом занятие кончается, но Петя не хочет уходить и требует, чтобы я выполнил его задание: он построит фигурку, а я должен построить такую же, повернутую на 90°. Я выполняю его задание, и он уходит удовлетворенный.

Занятие 28. Начинаем теорию вероятностей

11 апреля 1981 (суббота) $10^{40} - 11^{15}$ (35 мин.)
(Дима, Женя, Андрюша)

Задание 1. Продолжение классификации с пересечением. Я снова кладу две веревочки и говорю: «Смотрите, какие вам Алла новые картинки нарисовала», — с некоторым нажимом на слово «новые». Не я один сменил тон: Андрюша, видимо, обработанный дома Людой, на этот раз гораздо более мягко спрашивает: «А почему мы всё время одинаковые задачи решаем?» Я ему безжалостно отвечаю: «А ты что — в прошлый раз все задачи легко решил?» Андрюша закусывает губу и молчит, на меня не смотрит. Я добавляю: «Мы так делаем просто для того, чтобы научиться хорошо решать такие задачи».

Я договариваюсь с ребятами, что на этот раз будет строгий порядок и все будут решать задачи по очереди. Пока один свою задачу не доделает, остальные ему не мешают. Мне бы с самого начала усвоить кондовый школьный принцип: прежде всего — дисциплина! Всё шло бы гораздо глаже.

(1) **Задание Диме:** карандаш, ручка, пишущая машинка, швейная машинка, пылесос (3 инструмента для письма, 3 домашних машины; общий элемент — пишущая машинка). Дима говорит: «Это то, чем пишут», — но в пересечение почему-то кладет швейную машинку. Я спрашиваю: «Разве этим пишут?» — «Да». — «А что это?» — «Швейная машинка. А-а! Ею не пишут, а строчат!» Тут Женя исправляет Диму, но Дима из чувства противоречия делает что-то уж совсем несусветное. После долгого обсуждения мы совместно восстанавливаем правильное решение. Ребята никак не могут сформулировать, что общего у «домашних машин». Я им помогаю, и

мы обсуждаем, что можно было бы еще положить в этот класс (мясорубку, стиральную машину, холодильник, ...) и во второй (мел, кисточку, ...).

(2) **Задание Андрюше:** песочные часы, ручные часы, будильник, кольцо, бусы (3 часов, 3 предмета, которые человек надевает; общий элемент — ручные часы). Андрюша правильно называет классы: «Это часы, а это надевают», — но в пересечение почему-то кладет будильник. Мы обсуждаем его решение, я спрашиваю, надевают ли будильник. Женя снова вносит правильное исправление. Тут вмешивается Дима, начинает всё перекладывать и примерно с третьей или четвертой попытки приходит к правильному решению. На этот раз Женя из чувства противоречия заявляет, что это решение (его собственное!) — неправильное, и опять всё перепутывает. Я восстанавливаю правильное решение, объясняю его. Неожиданно вмешивается Алла, которая придумала другое решение — «часы» и «круглые предметы» (в пересечении — будильник). Вообще демонстрация того факта, что возможны разные решения — дело полезное, но в данном случае именно такое разбиение (на «часы» и «круглые предметы») было предусмотрено в следующей задаче, так что эта вылазка Аллы фактически явилась подсказкой.

(3) **Задание Жене:** песочные часы, ручные часы, будильник, тарелка, барабан (3 часов, 3 «круглых предмета»; общий элемент — будильник). Женя сразу назвал правильные классы, но никак не решался положить карточки среди веревок. А когда положил, то в середине оказались песочные часы. Он, однако, объяснил, что они круглые, если смотреть сверху. Мне пришлось согласиться, и я убедил Женю, что будильник надо тоже положить в пересечение. После этого мы еще обсудили, что было бы, если бы ручные часы тоже были круглыми (множество часов было бы подмножеством множества круглых предметов).

Задание 2. Подступы к теории вероятностей. В непрозрачную сумку-мешок я кладу два желтых и два черных кубика. Говорю, что это темный чулан, в котором лежит пара желтых и пара черных ботинок. Чтобы пойти в гости, надо достать обязательно пару (нельзя надеть разноцветные ботинки). Но из-за того, что чулан темный, приходится доставать ботинки наугад, один за другим.

Ребята по очереди тащат кубики из мешка и запоминают, сколько кубиков пришлось вытащить до получения пары.

[Лучше было бы раздавать плашечки с цифрами из математического набора первоклассника.]

Мы обсуждаем, при каком количестве вытащенных кубиков получить одноцветную пару (а) нельзя; (б) можно, но не обязательно; (в) обязательно получится пара.

Затем то же самое задание повторяется с шестью кубиками (тремя парами). Во время моих объяснений Андрюша все время отвлекался и явно скучал; Люда (впервые за всё время) делала ему замечания — видимо, с целью «подготовки к школе».

После кружка произошла следующая сценка. Женя (маленькая) носила кубики ко мне в кабинет и ставила на пол, а я переставлял их себе на стол. В тот момент, когда на столе было 6 кубиков, а на полу — 3, Дима сказал: «А-а, там осталось всего три кубика!» Оказывается, он во время кружка умудрился сосчитать, что кубиков всего 12 (я столько заготовил на всякий случай), а сейчас устно решил задачу

$$12 - (6 + 3) = 3.$$

Характерно, что я с ним арифметикой совершенно не занимаюсь, только иногда отвечаю на его вопросы. Он постигает ее самостоятельно. Через месяц ему будет 5 лет.

Занятие 29. Полный провал

18 апреля 1981 (суббота) $10^{30} - 10^{45}$ (15 мин.)
(Дима, Петя, Женя, Андрюша)

Классификация с пересечением — окончание.

Использованы наборы:

(1) окно, стакан, очки, кольцо, ремень (три стеклянных предмета, три предмета, надеваемых человеком; общий элемент — очки) [ср. с вопросом 4];

(2) рояль, скрипка, барабан, тарелка, будильник (три музыкальных инструмента, три круглых предмета; общий элемент — барабан) [ср. с вопросами 3 и 5];

(3) рояль, скрипка, барабан, диван, шкаф (три музыкальных инструмента, три предмета мебели; общий элемент — рояль);

(4) окно, стакан, очки, чашка, кружка (три предмета из стекла, три предмета, из которых пьют; общий элемент — стакан);

(5) будильник, тарелка, барабан, ложка, чайник (три круглых предмета, три вида посуды; общий элемент — тарелка).

Все задачи дети решили правильно. В пятой задаче они предложили другой вариант решения: поскольку чайник тоже круглый (если смотреть на него сверху), то в пересечении будут два предмета: тарелка и чайник.

После того, как с классификацией было покончено, я совсем было собрался перейти к следующему заданию. В этот момент Андрюша спросил:

«*А когда математика кончится?*» Я ответил, что она уже кончилась для тех, кому неинтересно, и что он может идти играть, если хочет, поскольку я никого не заставляю и т. д. Но сказал я всё это не очень внятно и, честно говоря, несколько упавшим голосом. Наступило минутное замешательство, в течение которого я доставал мешок и цветные кубики, и тут Андрюша решился и сказал: «Нет, я всё-таки пойду поиграю», — и убежал в детскую комнату, где в это время были Женечка, Саня и Андрюшина двоюродная сестра, тоже Саня, трех лет (так ему всё это надоело, что он предпочел общество трех маленьких девочек). Следом за ним, ни слова не говоря, убежал Петя. После этого Женя неуверенно пробормотал: «Я вообще-то уже всё решил», — и тоже убежал. Только Дима хотел заниматься еще (отчасти это может быть связано с нашей беседой с ним в предыдущий день о его поведении на английском и о том, как важно самому хотеть заниматься). Он даже чуть не заплакал, когда я сказал: «Потом».

◁ Чуть не плакал я не от того, что теперь не будет урока, а от жалости к папе (он был такой грустный!) и от того, что я его утешал, а он не обращал внимания. — Дима. ▷

Но нам уже было не до него: мы решали «педагогические проблемы». Причем проблемы эти касались не только детей, но и меня самого. Алла прекрасно знала, сколько души я вкладываю в эти занятия, и ей потребовалось немало такта, чтобы как-то меня утешить. Я же сам не знал, в какую крайность броситься: то ли забросить всё к чертовой матери, то ли... что? Никакой другой идеи в голову, увы, не приходило. В неудобном положении оказалась также и Люда: с одной стороны, ей хотелось как-то защитить Андрюшу от нашего гнева, с другой — и нас не обидеть.

В итоге, после многочисленных общих и сепаратных обсуждений были приняты следующие решения:

1) *Андрюшу больше не приглашать.*[8] Назавтра я поговорил с Людой в том плане, что не вижу смысла заставлять его делать то, что ему не нравится, что он еще в школе успеет натерпеться, а пока пусть последние месяцы подышит спокойно, и что в конце концов он пропустит 3—4 занятия, так что потеря невелика. По существу, в этих словах нет никакого лицемерия. Ровно так оно всё и есть: и то, что не следует заставлять, и то, что еще в школе натерпится. К тому же он в сентябре уже идет в школу, а наш

[8]Образ Андрюши, который предстает из этих заметок, совершенно не соответствует действительности. Всё из-за того, что пропущены первые 20 занятий, на которых он был таким же полноценным и активным участником, как и остальные.

кружок — для дошкольников[9]. Жаль только, что всё это пришлось говорить не *до* всей этой истории, а после, и это придавало нормальным словам нежелательный оттенок. К тому же и мое состояние духа не совсем предрасполагало к переговорам: всем было видно, что я обижен.

2) *Ребят ни в коем случае не ругать.*

3) *Сделать перерыв.* Отчасти в надежде на то, что они сами спросят, когда же будет математика (раньше такое иногда бывало — даже с Андрюшей). Я некоторое время упирался, говорил: «Пока сами не попросят, заниматься не буду». Трудно придумать что-нибудь более глупое. Ребенок живет данным моментом, а не думает о том, что «должно произойти в субботу в 11 часов». Если же в субботу ничего не произойдет, он скорее всего просто ничего не заметит.

Перерыв продлился три недели.

4) *Сделать следующее занятие резко непохожим на все предыдущие* (совет Риты Марковны[10]).

◁ Мне бы как раз больше понравилось, если бы оно было такое же, как всегда. Я не помню, скучал ли я по кружку, но если скучал, то по тому, что было раньше, а не по чему-то новому. По крайней мере, я был неприятно удивлен, когда мы сели не на обычном месте, а в коридоре. — Дима. ▷

Глядя из сегодняшнего далека, можно только удивляться, до чего же гипертрофированной была моя реакция. Я оказался в роли революционера, мечтавшего осчастливить человечество. А человечество, вместо того, чтобы с распростертыми объятиями броситься мне навстречу, продолжало предаваться своим порокам. И вот я уже готов рубить головы...

Занятие 30. Переливание воды

9 мая 1981 (суббота) $10^{10} - 10^{40}$ (30 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Опыты с переливанием воды (сохранение количества вещества). Занимались в коридоре — с одной стороны, чтобы не испортить ковер, но также и для создания «новизны обстановки».

Оборудование. Две кастрюли: в одной вода, подкрашенная заваркой чая, в другой вода, подкрашенная чернилами; две кружечки для наливания; две

[9]Через год пошли в школу Петя и Женя, но мы всё же продолжали заниматься, пока еще через год в школу не отправился Дима.

[10]Имеется в виду Р. М. Фрумкина. Мы часто советовались с ней по самым разным поводам, и этот случай был одним из них.

пустых молочных бутылки; два узких стакана; один широкий стакан; четыре фужера. Я договариваюсь с ребятами, чтобы они постарались ничего не разбить.

Вопрос первый. Я наливаю в бутылки поровну синей и желтой воды; ребята убеждаются, что поровну; после этого я разливаю желтую воду в два фужера и спрашиваю, какой теперь воды больше: желтой или синей? Вопреки всем моим ожиданиям Дима неожиданно дает правильный ответ («снова поровну»), и даже правильно всё объясняет («Потому что та же самая вода, ее только перелили. Ничего не добавляли и не убавляли».) Я пытаюсь не сдаваться: разливаю желтую воду по трем, потом по четырем фужерам (у Пиаже были такие испытуемые, которые меняли свою точку зрения, когда количество сосудов увеличивалось). Но Дима стоит на своем: воды столько же. Я с надеждой обращаюсь к Пете: «А ты, Петя, как думаешь?» Но Петя, увы, думает так же, и Женя тоже.

Я обескуражен и смущен. Во-первых, вся моя программа построения познавательного конфликта по Смедслунду уже не нужна, так как дети и без меня всё освоили. Во-вторых, занятие, на которое возлагалось столько надежд, находится под угрозой: не прошло еще и пяти минут от начала, а я уже едва ли не исчерпал всё, что задумал. С трепетом в душе я приступаю к следующему вопросу: если и сейчас ответят правильно, то это снова провал занятия, и что мне тогда делать?

Вопрос второй. Я наливаю в широкий стакан немного жидкости и предлагаю налить в узкий стакан столько же. Петя наливает воду до того же уровня (рис. 2.10).

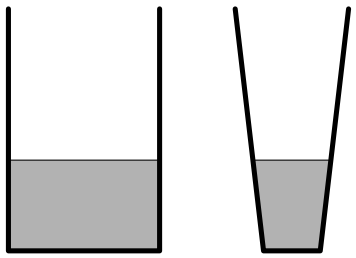

Рис. 2.10. Дети думают, что в этих стаканах одинаковое количество воды.

У меня немного отлегло от сердца. Я спрашиваю, что будет, если воду из широкого стакана перелить в другой узкий стакан (пустой). Станет ее больше или меньше? Ответ: «Столько же». — Значит, в двух узких стаканах будет поровну? — «Да». Я переливаю воду. Ребята очень удивляются, что в одном из стаканов оказалось больше, но довольно быстро догадываются, что дело в ширине стакана. Следует длинное обсуждение того, как влияет ширина и высота на количество жидкости.

После этого мы еще некоторое время занимаемся разными переливаниями. Дети понимают, что если нужно налить одинаковое количество жидкости в разные сосуды, то нужно сначала налить в одинаковые сосуды, а потом из одного из них воду перелить. Кроме того, переливание в одинаковые сосуды используется для проверки того, где воды больше.

Некоторую путаницу вносит то, что когда мы наливаем (правильно) поровну в узкий стакан и фужер, уровни воды оказываются одинаковыми, несмотря на разницу в ширине (рис. 2.11).

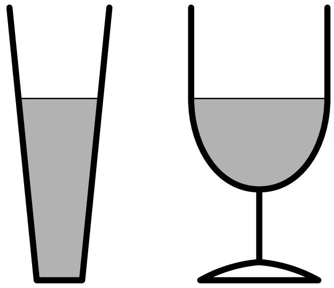

Рис. 2.11. А вот здесь воды и в самом деле поровну — это случайно так получилось.

Потом, когда мы наливаем поровну воды в бутылку и в фужер и для проверки хотим перелить воду либо из бутылки в такой же фужер, либо из фужера в такую же бутылку, Женя предлагает сравнить уровень воды, приподняв дно бутылки на высоту дна фужера (рис. 2.12). При этом он правильно объясняет свои действия тем, что ширина у фужера и у бутылки одинаковая.

Это наталкивает меня на следующий импровизированный вопрос. Я ставлю узкий стакан на перевернутую вверх дном кружку (рис. 2.13). При этом дно стакана и дно фужера оказываются на одной высоте. Я прошу налить воды поровну в стакан и в фужер. Наливает Женя — и допускает ту же ошибку, что и Петя вначале. Но стоило мне только снять стакан с кружки, и он сразу догадывается, что допустил ошибку, и исправляет ее.

Последний вопрос не связан с сохранением количества вещества, но связан с бутылками и водой. Каждый из ребят получает листок с изображением

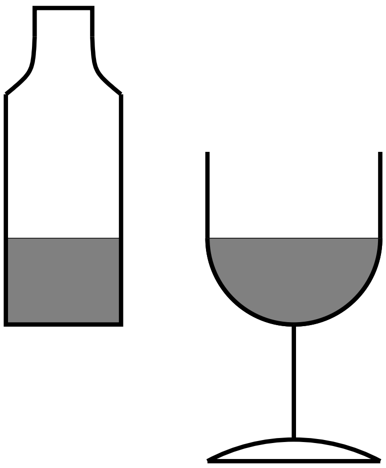

Рис. 2.12. Чтобы проверить, одинаковое ли количество воды в бутылке и в фужере, приподнимем бутылку так, чтобы ее дно оказалось на одном уровне с дном фужера.

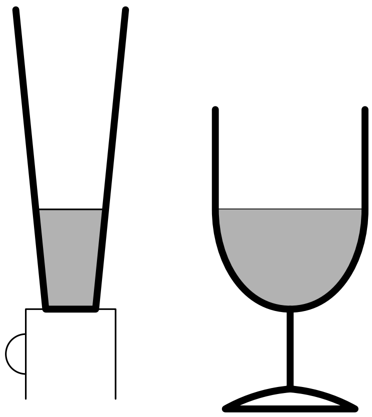

Рис. 2.13. Опять та же ошибка: воды здесь якобы поровну. Впрочем, на этот раз она быстро исправлена.

двух бутылок. Одна из них стоит вертикально, а другая наклонена. В вертикальной — уровень воды обозначен (рис. 2.14), нужно нарисовать уровень воды в наклоненной бутылке.

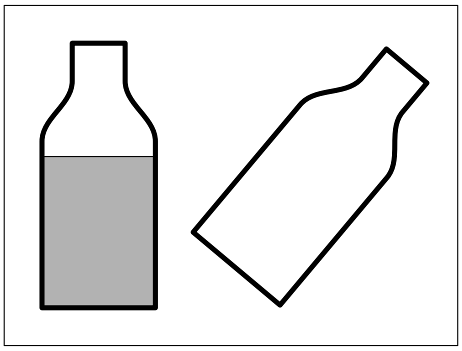

Рис. 2.14. Нарисовать уровень воды в наклоненной бутылке.

Петя сразу сделал правильный рисунок. Женя подсмотрел у Пети и тоже сделал правильный рисунок (в данном случае тот факт, что он подсмотрел, не имеет большого значения; раз он нарисовал правильно, значит, согласно Пиаже, у него уже сформировалась соответствующая структура). Дима рисует неправильно — уровень параллелен дну.

◁ Я пытался не представить себе воду в бутылке, а угадать ответ. При этом, по-моему, мне было трудно сопоставить горизонтальный рисунок и вертикальную бутылку. — Дима. ▷

Мы наливаем в бутылку воду и, наклоняя бутылку, показываем ему уровень. Дима делает попытку исправить рисунок, но на этот раз изображает уровень вертикальным, а потом даже кривым (рис. 2.15).

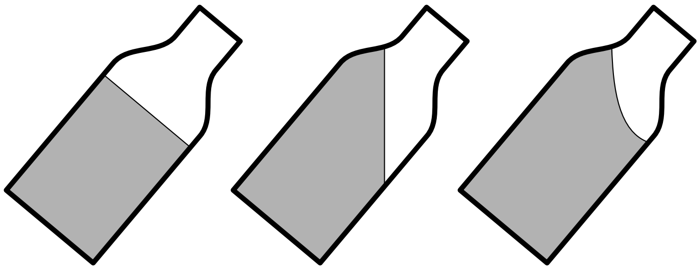

Рис. 2.15. Попытки нарисовать уровень воды в наклоненной бутылке

(Помню, не так давно, я вычерпывал воду из ванночки черпаком, и Дима спрашивал, почему так получается, что я все время черпаю с одного края ванночки, но яма на этом месте не образуется, а вода всё равно остается ровной).

◁ Если бы меня спросили, получится ли так яма, я бы, наверное, ответил, что нет. Но я не понимал, зачем еще можно вычерпывать воду, если не затем, чтобы получилась яма. А уж если сам Папа копает, то всё должно получится. Папе я верил больше, чем своему опыту. — Дима. ▷

Я ничего не объясняю, и занятие на этом кончается. Напоследок рассказываю историю про Крошку Ру, который очень не любил рыбий жир, а маме Кенге надо было обязательно его уговорить, потому что доктор велел выпивать в день по стакану (при этом я показал на узкий стакан). И тогда мама Кенга стала переливать рыбий жир из узкого стакана в широкий. Крошка Ру *думал*, что после переливания рыбьего жира становится меньше (его ведь теперь полстакана, и уровень ниже) и соглашался его выпить. Вот так и вылечился.

По моим, пока незначительным, наблюдениям дети-интраверты проявляют больше склонности к логическому мышлению, а экстраверты имеют бóльшие успехи в геометрии. К интравертам я отношу Диму и Женю, а к экстравертам, соответственно, Петю и Андрюшу (хотя никаких тестов на эту тему я не проводил, это всё — внешние впечатления).

Характерно, что Дима до сих пор часто проливает жидкости из сосудов (чай из чашки, воду из банки для рисования и т. п.), так как недостаточно следит за их горизонтальностью. Мы на него сердимся за неуклюжесть и невнимательность, а причина, возможно, в математике.

Занятие 31. Снова теория вероятностей

16 мая 1981 (суббота) $10^{35} - 11^{00}$ (25 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Теория вероятностей — продолжение.

Задание 1. *Я*: «Дима и Женя, наверное, сразу вспомнят игру, в которую мы играли, а Пети тогда не было, поэтому я расскажу всё с начала». Я рассказываю про человека, ищущего пару ботинок, и про темный чулан. Кладу в мешок четыре пары кубиков — два желтых, два красных, два синих и два черных. Мы по очереди вытаскиваем кубики до тех пор, пока не образуется одноцветная пара. Каждый берет себе плашечку с цифрой, показывающей, сколько ботинок ему для этого пришлось вытащить.

Я тоже участвую в игре. При этом мне достались четыре кубика всех четырех цветов. Я обсуждаю с ребятами тот факт, что какой бы кубик ни оказался пятым, все равно обязательно будет готовая пара.

Петя продемонстрировал, что такое везение: единственный раз за оба занятия вытащил сразу два одноцветных кубика.

Задание 2. Та же история про трехногого человека. Мы кладем в мешок три желтых, три красных и три синих ботинка; цель та же — вытащить вслепую полный комплект обуви, три одноцветных ботинка. (Наташа пытается мне «помогать» и подсказывает, что это не ботинки, а варежки и шапка, но я настаиваю на своем варианте.)

Когда тащу я, у меня снова оказывается максимальный вариант: 6 кубиков, причем трижды по два цвета. Я снова пользуюсь возможностью и обсуждаю с ребятами тот факт, что какой бы кубик я сейчас ни вытащил (седьмым по счету), у меня обязательно образуется полный комплект.

Задание 3. После того, как каждый вытащил кубики по одному разу, я убираю мешок и раскладываю все кубики на столе.

Последовательно для трех, четырех, пяти и шести кубиков мы показываем, как *может получиться* комплект и как *может не получиться* комплект.

Потом я предлагаю сделать то же самое для семи кубиков. После нескольких проб дети заявляют, что после семи вытаскиваний хотя бы один комплект получится обязательно. Я дополняю их опыт чем-то вроде доказательства.

Задание 4. Параллельно с обсуждением п. 3 я вытаскиваю сначала синюю бумажку — на нее мы кладем плашечки с цифрами $0, 1, 2$ («невозможно получить комплект»). Затем появляется зеленая бумажка, и на нее мы кладем цифры $3, 4, 5, 6$ («возможно, но не обязательно» получается комплект). Наконец, цифры $7, 8, 9$ («обязательно» получается комплект) мы кладем на красную бумажку. (Интересно отметить, что упомянутые синестезии невозможности с синим цветом, обязательности с красным, а возможности с зеленым мы с Аллой предложили независимо друг от друга, что говорит в пользу того, что они выбраны в каком-то смысле правильно. Что-то вроде «холодно», «тепло», «горячо».)

Задание 5. Я рассказываю о том, что градусник измеряет температуру («тепло или холодно»), а я придумал другой, сказочный градусник, который измеряет «надежду на успех». Показываю рисунки, на которых нарисованы: градусник с нулевой высотой столба жидкости («невозможно»), с максимальной высотой («обязательно»), а также три градусника, показывающие ту или иную степень надежды. Мы обсуждаем, какой из этих градусников показывает больше надежды, а какой меньше. А теперь посмотрим, что покажет наш градусник в задаче про трехногого человека. Я достаю лист (перфокарту), на котором нарисованы 9 градусников, и под каждым — цифра (от 1 до 9), и предлагаю на каждом градуснике показать карандашом уровень надежды на то, что мы вытащим три одинаковых ботинка. Однако мы с Димой должны были ехать к зубному врачу, и я уже спешил, поэтому для цифр 1, 2 (вероятность равно нулю) и 7, 8, 9 (вероятность равна единице) показал всё сам (и столб жидкости фломастером тоже рисовал сам), а ребятам оставил только цифры 3, 4, 5, 6. Они совершенно правильно показали уровень надежды повышающимся от цифры к цифре, и мы этот факт обсудили (рис. 2.16).

[Надо было еще показать настоящий градусник и объяснить его устройство, так как нет уверенности, что они хорошо знают, как с ним обращаться.]

На этом занятие закончилось, я вскочил, и мы с Аллой побежали одевать Димку.

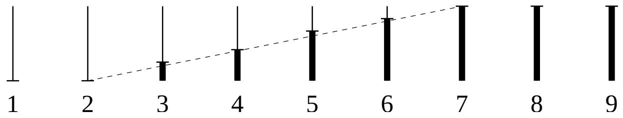

Рис. 2.16. Градусник, измеряющий надежду вытащить три одноцветных кубика.

Занятие 32. Дипломы

23 мая 1981 (суббота) $10^{40} - 11^{15}$ (35 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Заключительное занятие. Я говорю ребятам, что сегодня у нас последнее занятие в этом учебном году, и то задание, которое они сегодня получат, они должны постараться сделать очень аккуратно.

Задание 1. На отдельном листе бумаги я напоминаю ребятам обозначение операции сложения (+), а также знак равенства (=). Мы записываем несколько примеров на сложение.

Задание 2. Задание, аналогичное тому, что дается в болгарском букваре. Каждый получает листок плотной бумаги (в уголке написаны фамилия и имя). Листок разграфлен отрезками прямых линий на множество клеточек неправильной формы (немногим более 20 клеток). Внутри каждой клетки написана задача на сложение, напр. $3+2=$ (все примеры даны в пределах 7, то есть 7 — наибольшая из получающихся сумм). Ребята должны выполнить все эти сложения и карандашом записать ответ.

Я проверяю результаты, исправляю ошибки (мы их стираем, и сложение выполняется заново), показываю пропущенные клеточки.

Дима пишет цифры 3 и 4 зеркальным образом: Ɛ ᔭ

Приходится написать на листе бумаги крупно все цифры и положить перед ним на стол.

Первым справился Петя, не сделав ни одной ошибки (хотя и пропустив пару клеточек). Вторым кончил Дима, сделав одну ошибку, которую сам обнаружил. Неожиданные трудности у него вызвал пример $0 + 2$, он долго колебался и думал, не получится ли в результате 0. Женя работал медленнее других, но тоже допустил всего одну ошибку. Примеры $2+5$ и $3+4$ вызвали у него затруднение; я принес ему счетные палочки, и он справился. Мальчики, уже закончившие, мешали ему, отвлекая и подсказывая.

В процессе работы Виталий[11] нас всех фотографировал.

Задание 3. Следующее задание — найти все клеточки с суммой 7 и закрасить их красным фломастером. Я еще раз призываю всех к аккуратности; советую сначала поставить в нужных клеточках красные точечки, потом мы вместе проверяем (каждый потерял по нескольку клеточек, я их показываю), затем начинается закрашивание. Получается большая красивая красная пятерка. Но, даже закончив работу, ребята замечают это только после моего вопроса, когда я карточку показал издали. Дима очень удивился, как это так получилось.

Задание 4. Я демонстрирую мальчикам свой диплом об окончании университета, объясняю, что такое диплом, что он означает, что на нём пишется. Показываю вкладыш, в котором стоят оценки. Я объясняю также, что такое «оценка за год». После этого начинается торжественное вручение дипломов. Диплом сделан на типографском бланке «Диплома наставника молодежи». Мы обрезали поля (в том числе лозунг «Пролетарии всех стран, соединяйтесь!»), на место серпа и молота наклеили картинку, нарисованную разноцветными фломастерами (три пересекающихся множества и еще изогнутый лист бумаги, на котором нарисован граф с цветными стрелками), слово «Диплом» оставили, а слова «наставника молодежи» заклеили словами «математического кружка». Далее следовал такой текст:

> *Этот диплом дан Диме Звонкину за то, что он целый год занимался математикой и стал очень умным.*
>
> *23 мая 1981 г.*

[11] Виталий — папа Пети.

(У остальных текст, естественно, такой же.)

Я объясняю, что та пятерка, которую они нарисовали, — это их пятерка за год, и что этот листок является вкладышем в их диплом. Дима спрашивает: «А почему мы все получили пятерки?» Я отвечаю: «Потому что все очень хорошо занимались весь год. А кроме того, я считаю, что вы ее сегодня вполне заработали: ведь если бы вы сосчитали что-нибудь неправильно и закрасили бы совсем не те клеточки, то и пятерки у вас не получилось бы». Последнее соображение вызывает оживленное обсуждение: они только сейчас поняли, что результат зависел от их правильной работы. Потом все по очереди читают, что написано у них в дипломе. Кажется, они всерьез поверили, что стали умными.

Я всех поздравляю с окончанием занятия и учебного года. Катя фотографирует каждого с дипломом в руках. После этого они долго сидят и хвастаются друг перед другом: «А у меня пятерка!» — «А у меня тоже пятерка!» — «А у меня тоже пятерка!» — «А я умный!» — «А я тоже умный!» — «А у меня пятерка!» и т. д., пока Дима не заявляет: «Нам нечем хвастаться, потому что у нас всех одно и то же».

Несколько дополнительных задач

В этом разделе я очень бегло и без всяких комментариев даю список задач из первых двадцати занятий, которые удалось вспомнить (и которые не упоминаются в других местах).

Определение количества предметов без счета.

1. Делается лесенка из кубиков (рис. 2.17). На каждую ступеньку кладется цифра (по очереди). После этого для последних столбиков проверяется, соответствует ли количество кубиков в них лежащей сверху цифре.

2. Делается еще один столбик из кубиков. Для определения количества кубиков в нём его прикладывают к лесенке.

3. Один мальчик берет два раза по три кубика, а другой — три раза по два. У кого больше? Обсуждается вопрос, почему одинаково.

4. Аналогично №1: Кладется ряд из кубиков, на нём сверху цифры. Количество кубиков в других рядах определяется прикладыванием.

5. Отправление писем, когда не хватает конвертов (попытаться разложить их по другим конвертам).

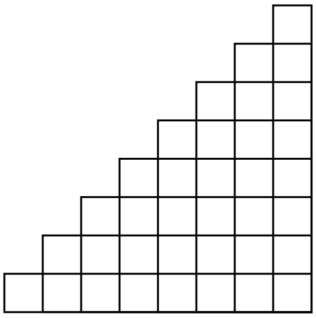

Рис. 2.17. Лесенка из кубиков

Комбинаторика.

1. Разложить треугольник, кружок и квадрат в разных последовательностях.

2. То же, но с тремя цветами.

3. То же с четырьмя предметами (два квадрата и два кружка).

Классификация.

1. Дана таблица 4×4. Слева нарисованы фигуры, которые помечают ее строки: квадрат, круг, треугольник и полукруг. Сверху изображены цвета, помечающие столбцы: красный, синий, желтый, зеленый. Требуется каждый предмет (например, синий квадрат) положить в нужную клеточку.

Квантор общности.

1. На столе лежат несколько фигурок. Верно ли, что:
а) все треугольники — красные?
б) все синие фигуры — кружочки?
в) все фигурки — без дырочек?

Порядок.

1. В трубочку закатываются три шарика: красный, синий и желтый. В каком порядке они будут выкатываться обратно?

2. Частичный порядок: в каком порядке мы надеваем разные предметы одежды и обуви (они нарисованы на карточках)? Ответить на вопросы:
а) что можно надеть раньше шубы?
б) что обязательно нужно надеть раньше шубы?

в) какие предметы одежды можно надеть последними?
г) какие можно снять первыми?
д) что можно снять только после шубы?
е) что можно снять и до, и после шубы?
ж) что нужно обязательно снять до шубы?

3. Я еду на работу сначала на автобусе, потом на троллейбусе, потом на метро, потом на трамвае. В каком порядке я еду обратно?

Симметрия.

1. Проводится прямая линия на листе бумаги и объявляется «зеркалом». Преподаватель проводит с одной стороны от нее произвольную загогулину. Требуется нарисовать ей симметричную. Результат можно проверить с помощью реального зеркала. Потом можно показать детям рисунки бабочек, цветов и т. п., спросить, где у них «зеркало».

2. Усложнение предыдущего: загогулина лежит в стороне от линии, или, наоборот, пересекает ее. Ее можно также делать многоцветной.

3. То же задание можно повторить на мозаике.

Поворот.

1. Преподаватель рисует фигурку. Ученик должен нарисовать такую же фигурку, но не «стоящую», а «лежащую» (см. примеры на рис. 2.18). Предварительно можно повертеть карточки с фигурками.

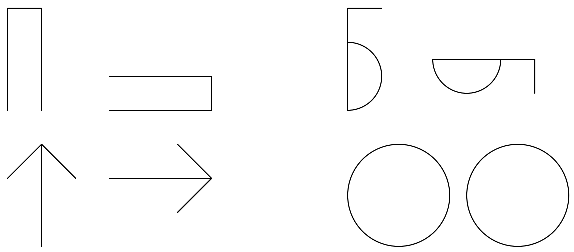

Рис. 2.18. Фигуры, повернутые на 90°.

2. То же самое задание на мозаике; то же, но с поворотом не по, а против часовой стрелки.

Разное.

1. Продолжить последовательность («узор»), рис. 2.19.

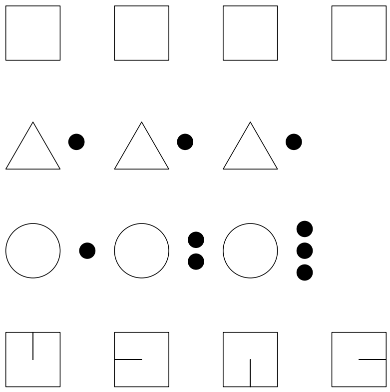

Рис. 2.19. Последовательность фигурок рисуется слева направо. Нужно угадать закономерность и продолжить.

2. Даны пары фигурок (рис. 2.20). Для каждой пары нарисовать «разницу» между ними, т. е. то, что присутствует только на одной фигурке, но не на двух.

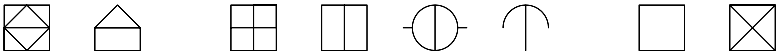

Рис. 2.20. Нарисовать всё то, что «отличает» одну фигурку от другой.

3. На мозаике построена фигура из красных и желтых фишек. Построить другую фигуру, заменив красные фишки желтыми, а желтые — красными.

4. Дана фигура. Построить такую же вверх ногами.

5. Диагональ делит прямоугольник и параллелограмм на два равных треугольника (бумажный параллелограмм разрезается по диагонали, после чего один треугольник накладывается на другой).

6. Задание, аналогичное №22-3 (см. стр. 53), но все фигурки к тому же еще раскрашены в три цвета.

7. У треугольника три угла. Один угол отрезали. Сколько осталось? (Ответ: четыре. Ведь если у треугольника отрезать угол, он превратится в четырехугольник.)

8. У последнего «пляшущего человечка» (рис. 2.21) указать форму юбочки и положение рук. Юбочки можно сделать разноцветными изначально, а

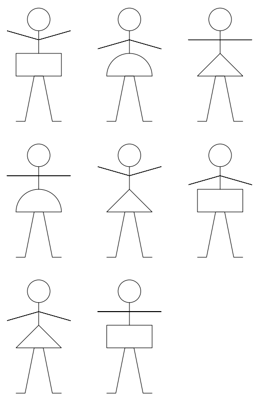

Рис. 2.21. «Пляшущие человечки». Добавить недостающего.

можно попросить ребят их раскрасить потом (с условием, чтобы в каждой строке и в каждом столбце все цвета были разными).

9. Дан рисунок с разноцветными фигурками — типа того, что показан на рис. 2.22. К нему задаются вопросы: сколько здесь нарисовано:

а) кругов?
б) красных (синих, желтых, зеленых) фигур?
в) многоугольников?
г) невыпуклых фигур?
д) четырехугольников?
е) прямоугольников?
ж) красных (и т. д.) многоугольников?
з) фигур (всего)?

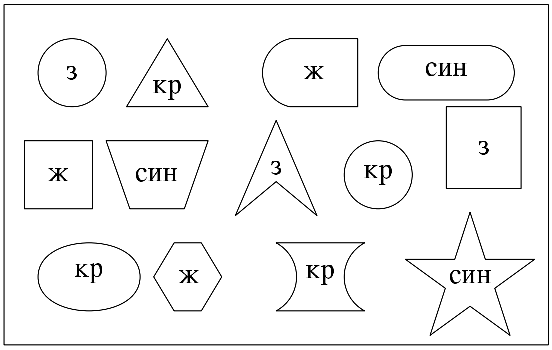

Рис. 2.22. Разноцветные фигурки.

Как рисовать куб?

Это — слегка затерявшаяся история: она записана на отдельном листке и без даты.

Однажды Дима сообщил мне: «А я знаю, как рисовать куб. Мне показали». — «Ну, как же?»

В ответ он нарисовал стандартную картинку, изображающую куб в «аксонометрической проекции» (рис. 2.23 слева). А я где-то читал, что детским рисункам более свойственна обратная перспектива (как в иконописи), и потому стал приставать с вопросами:

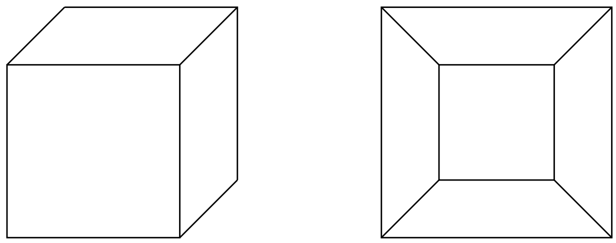

Рис. 2.23. Слева: так рисуют куб взрослые. Справа: рисунок, более свойственный ребенку (куб в «обратной перспективе»).

— А вот это что?

— Это верхняя сторона.

— А нижняя где?

— Ее не видно.

— А почему верхнюю видно, а нижнюю не видно?

— Да-а... действительно...

Дима задумался. Потом сам добавил: «И вот этот бок тоже видно, а вот этот нет». После этого он взял кубик, взял фломастер, уселся на пол, обложился листами бумаги и стал разбираться. Трудился он никак не менее часа. Потом пришел ко мне: «Вот, папа, я всё понял». И показал то, что изображено на рис. 2.23 справа, т. е. куб в обратной перспективе, пояснив при этом, где у него верхняя сторона, где нижняя, где правая и где левая. Я сказал ему: «Молодец!»

Следует признать, что в этой истории присутствует оттенок догматизма с моей стороны. Уж если я решил, что не следует искусственно перетаскивать ребенка на более высокий уровень развития, то буду даже стаскивать его обратно вниз, если это вместо меня посмел сделать кто-то другой. Не следует чрезмерно преувеличивать важность ни того, ни другого. Но вот что я безусловно ставлю себе в заслугу, так это час самостоятельной Диминой работы — целый час исследования вопроса о том, как же мы на самом деле видим куб и как его следует рисовать.

Хочу всё же добавить, что академик Б. В. Раушенбах в своих монографиях «Пространственные построения в живописи» (М.: Наука, 1980) и «Системы перспективы в изобразительном искусстве. Общая теория перспективы» (М.: Наука, 1986) показывает, что на самом деле существует много разных систем перспективы, и каждая из них имеет свои достоинства и свои недостатки. Обратная перспектива не лучше и не хуже классической ренессансной. Она больше подходит для изображения близких к нам предметов, а ренессансная — удаленных.