Глава 3.

Дети и C_5^2: история одной задачи

В этой главе использованы материалы моей статьи «Дети и C_5^2» в журнале «Знание–Сила», №2 за 1986 год.

Читатель уже мог заметить, что в наших занятиях, скажем, теорией вероятностей, нет ни определений, ни формул, ни теорем — ни даже арифметических подсчетов. Термин «теория вероятностей» используется просто за неимением лучшего. Ну, а что же тогда есть, если все эти стандартные математические ингредиенты отсутствуют?

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно задать другой: а откуда вообще возникла теория вероятностей? Где ее источник? Ясно: как и многие другие науки, как даже сама арифметика, теория вероятностей возникла из наблюдений над определенными явлениями реального мира, а именно, над случайными, непредсказуемыми явлениями. Так во́т, как раз такие наблюдения, предшествующие науке, вполне можно проводить вместе с детьми. Не любые, конечно, лишь самые простые. Да дети и сами, без нас, этим занимаются — например, тогда, когда играют в игры с использованием игральной кости (кубика с написанными на нём очками от 1 до 6). В наших силах, однако, чуть-чуть выпятить, самую малость подчеркнуть вероятностную природу их наблюдений, а также познакомить их с тем, что вероятностный мир тоже несет в себе значительное многообразие. Можно, например, вместо кубика предложить детям кособокий многогранник, чтобы они увидели, как игра становится «несправедливой»: одни цифры выпадают чаще, чем другие. Или можно придумать игру, в которой требуется считать сумму очков на двух костях. Здесь тоже дети рано или поздно заметят, что, скажем, сумма 7 выпадает гораздо чаще, чем сумма 2. В такого рода деятельности мы не ограничены ничем, кроме собственной фантазии и реальных возможностей реальных детей. Если дети поняли что-то, если какое-то зерно запало в разум — очень хорошо. Если нет — неважно; тогда, значит, мы «просто играли».

Попробую сформулировать еще раз. Нас интересует не наука сама по себе как готовый продукт деятельности прошлых поколений, а те предварительные, предшествующие ей наблюдения, которые когда-то послужили толчком к ее появлению.

В этой главе я хочу рассмотреть более подробно один пример. В главе 1 рассказывалось об одном занятии; в этой главе речь пойдет об одной задаче. Всего одна задача — а сколько она дает поводов для размышлений!

Комбинаторная задача

Задача эта относится к области комбинаторики. Когда-то такую науку проходили в школе, в девятом классе (имеется в виду школа-десятилетка). Потом сочли очень трудной (вспомните хотя бы такое пугало, как *бином Ньютона!*) и из программы исключили. А все трудности старшеклассников состояли попросту в том, что им приходилось сразу начинать с формул, не пощупав ничего руками. В данном случае выражение «пощупать руками» надо понимать буквально. Ведь в комбинаторике речь идет о подсчете количества тех или иных комбинаций предметов. Только самих предметов-то и нет — их надо вообразить, и комбинации тоже. Вот если бы начать с комбинирования реальных кубиков, фишек... Но кто же станет этим заниматься в девятом классе!

Мы рассаживаемся вокруг мозаики. Задание такое: надо построить «бусы» — цепочку из пяти фишек, в которой две фишки должны быть черными, а оставшиеся три — белыми. Это, разумеется, можно сделать разными способами. Так во́т, наша задача как раз и состоит в том, чтобы перебрать все способы и при этом избежать повторений. По науке эти последовательности называются *сочетаниями из пяти элементов по два*; их количество в отечественной литературе обозначается C_5^2, в англоязычной — $\binom{5}{2}$, и равно оно $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. Ничего этого, конечно, дети не знают и на наших занятиях не узна́ют. Они просто строят бусы — по очереди, один за другим. Каждый результат проверяется всеми вместе — действительно ли он новый или совпадает с каким-нибудь из построенных ранее. Порой и спорим. Например, на рисунке 3.1 изображено одно решение или два разных? На самом деле спорить тут не о чем: мы можем *договориться*, что эти решения разные, а можем — что одинаковые. Получатся две разные задачи, и обе вполне интересны. Но более легкая из них та, в которой эти бусы считаются разными, и я предлагаю так и считать.

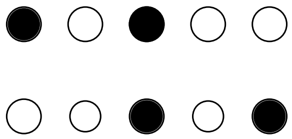


Рис. 3.1. Одинаковы ли эти бусы?

В конце концов мы доходим до 10 решений.

Главный вопрос комбинаторики — сколько всего имеется решений. Но мальчики еще очень далеки от него. Они вообще пока не видят разницы между «это невозможно» и «у меня не получается», и выражают твердую уверенность в том, что уж я-то могу построить и одиннадцатое решение, и двенадцатое, и вообще сколько захочу. Приходится взяться за дело мне самому. Ребята перебирали свои решения как попало, без всякой системы. Зато я демонстрирую образец систематичности: перебираю решения в строго определенном порядке. Сначала ставлю одну черную фишку на первое место, а вторую — поочередно на второе, третье, четвертое, пятое места. Когда эта серия исчерпана, ставлю первую фишку на вторую позицию, и т. д. Вы думаете, это производит впечатление? Ни малейшего. Единственное, что они поняли — это то, что у меня тоже ничего не вышло. (Как бы еще не подорвать свой авторитет...) Отличить одно решение от другого они уже могут, а вот отличить порядок от беспорядка им пока не по силам. Надо отложить эту задачу этак на полгодика. (А пока, может быть, приучать их аккуратно складывать все игрушки на свои места. Любопытно, связан ли порядок в игрушках с порядком в мыслях?)

Эквивалентные задачи

Прошло полгода, а может и больше, и задача появляется снова. Разумеется, я меняю ее физическое оформление. Каждый получает листок, на котором нарисованы сцепленные друг с другом кружочки, по пять штук в каждом ряду — см. рисунок 3.2.

Таких рядов заготовлено штук по пятнадцать — на случай неизбежных ошибок и повторений. Задача состоит в том, чтобы в каждой цепочке два

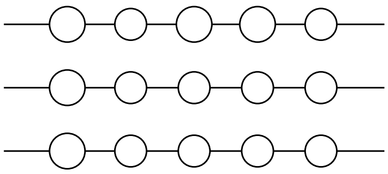


Рис. 3.2. Эти бусы изображены на бумаге; в каждой цепочке нужно закрасить две бусинки, но так, чтобы все бусы получились разными.

кружочка закрасить, а остальные три оставить пустыми. Чемпионом будет тот, кто найдет больше всего решений. И еще одна деталь, на первый взгляд пустячная. Я даю всем ребятам фломастеры разных цветов, а в дальнейших обсуждениях этот факт старательно игнорирую: каждый раз два кружка можно закрашивать любым цветом. Дети не всегда понимают, какая деталь является важной, а какая не имеет отношения к делу, и я пытаюсь, как могу, подчеркнуть чисто комбинаторную природу задачи. Помнится, в другой группе я вместо кружков рисовал то пять квадратов, то пять треугольников, и т. п.

Несколько минут самостоятельной работы (показывающей, между прочим, что задача на бумаге труднее задачи на мозаике — и это несмотря даже на прошедшие полгода), затем шумный обмен мнениями и результатами. Теперь у всех по 10 решений. «А вы помните, у нас уже была один раз очень похожая задача?» Ведь вот как легко промахнуться, подставив свою точку зрения вместо ребячьей! Что значит похожая? Мне как-то казалось само собой разумеющимся, что похожая задача — это та, в которой тоже фигурировали сочетания из пяти предметов по два. А дети решили, что похожая — это когда они тоже что-то рисовали фломастерами. Не люблю подсказывать, но на этот раз приходится. Мальчики с радостью хватаются за мозаику, строят бусы на ней и даже сами догадываются сверить решения на мозаике и на листочках. Кто-то вспоминает, что в прошлый раз тоже получилось 10 решений. Это, наконец-то, повод для первого сомнения: «А что, и правда больше нельзя построить?» Я загадочно улыбаюсь и перехожу к другому заданию...

Кажется, я набрел на золотую жилу. Или лучше сказать — на нового Протея. Эта задача допускает необычайное обилие непохожих друг на друга физических обличий; поэтому к ней можно возвращаться множество раз. Вот, например, как выглядит очередной вариант. В порядке очереди каждый из участников получает листок клетчатой бумаги, на котором нарисован прямоугольник размером 4×3 клетки. (Секундный спор о том, квадрат это или нет, после чего можно формулировать условие задачи.) Итак, требуется нарисовать все возможные дороги из левого нижнего угла в правый верхний, но при одном условии: из каждой клетки можно передвигаться только направо или вверх (см. рисунок 3.3). Если вам, уважаемый читатель, не совсем ясно, как связана эта задача с предыдущей, потерпите немного — сейчас всё разъяснится.

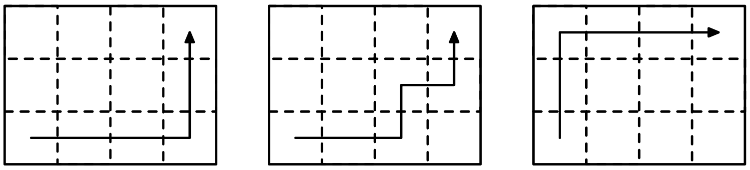
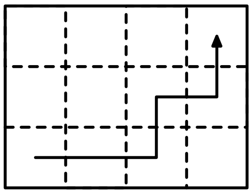


Рис. 3.3. Найти все пути из левого нижнего угла в правый верхний.

Работа кипит — чувствуется возросшая квалификация моих «математиков»: и ошибок меньше, и все 10 решений найдены довольно быстро. (А меж тем мы того и гляди наткнемся на новый подводный камень: мальчики уже начинают привыкать к тому, что во всех комбинаторных задачах ответом служит число 10. Не в этот раз, но в другой кто-то из них так и сказал: «Задача про 10». Надо срочно принимать меры — т. е. давать задачи с другим количеством решений.) Я, наконец, задаю главный вопрос: *чтобы пройти из угла в угол листочка, сколько шагов надо сделать направо и сколько вверх*? Увы, осечка. Я считаю шагом переход из клетки в соседнюю, а ребята — любой прямолинейный отрезок. Надо договориться о том, как правильно понимать слово «шаг». Договариваемся. Ну теперь-то уж ответ очевиден? Опять нет! Я в недоумении. После занятия обдумываю причину. А ведь и в самом деле, вопрос казался мне простым только по недомыслию. Ведь именно на этом свойстве — что количество шагов по горизонтали и по вертикали одинаково для всех путей — основано координатное представление векторов, то есть тот факт, что при сложении векторов их координаты тоже складываются. Отчетливо помню, как когда-то меня, уже достаточно взрослого, поразило это свойство векторов. На его основе можно сделать хорошую серию задач и с ее помощью даже дать намек на отрицательные числа, если допускать шаги назад, но подсчитывать их со знаком минус. (Кажется, эта идея так и осталась нереализованной.)

Ну а пока, на занятии, мы старательно подсчитываем шаги: оказывается, каждая дорожка содержит ровно три шага направо и ровно два шага вверх. Поэтому на следующем занятии мы решаем «новую задачу»: пишем последовательности букв ВВППП, ВПВПП, ВППВП, и т. д. — в каждой три буквы П и две буквы В. По замыслу каждая буква П означает шаг направо, а буква В — шаг вверх (см. рисунок 3.4).



П П В П В

Рис. 3.4. Шаг вправо обозначается буквой П, шаг вверх — буквой В.

Надо было видеть то волнение, которое охватило ребят, когда я показал им эту связь! Они немедленно потребовали разрезать листок, на котором написаны наши пятибуквенные слова, и, отталкивая друг друга, стали прикладывать каждое слово к соответствующей дорожке. Я остаюсь сторонним наблюдателем, однако пытаюсь невзначай подкинуть еще одну мысль. «Может быть, мы заодно еще какие-нибудь решения найдем, — говорю я. — Одиннадцатое, двенадцатое. . . » Один лишь Женя откликается на мои слова: «Нет, — говорит он. — Ведь здесь десять, и там тоже». — «Но, может быть, они разные? Здесь одни десять решений, а там другие?» К этому моменту, однако, все бумажки уже разложены, и наши надежды не оправдались: обе группы по 10 решений в точности соответствуют одна другой, или, как говорят математики, находятся во взаимно-однозначном соответствии. Как тем не менее важно хотя бы на мгновение усомниться в результате, чтобы потом ощутить его как результат!

Сейчас, на волне энтузиазма, можно продвинуться чуточку дальше. «А скажите, ребята, можно было обозначить шаги направо и вверх другими буквами? Не П и В, а другими?» — «Конечно! Какими хочешь можно». — «Ну, какими, например?» — «Например, А и Б», — говорит Петя. «Или, например, твердый знак и мягкий знак», — это Дима. «Или, например, — говорю я, — шаг направо обозначить плюсом, а шаг вверх — запятой». — «О-о-о!», — хохочут мальчики. «Или, — продолжаю я бесстрастным тоном, — шаг направо обозначать белым кружком, а шаг вверх — черным». — «Как это?» — «А вот так». Я беру ту дорожку, что на рисунке 3.4, беру соответствующее ей слово ППВПВ — и рисую рядом «бусы», показанные на рисунке 3.5.

И в наступившей паузе — паузе перед взрывом — еще успеваю соединить свои кружочки линиями, придав им окончательное сходство со второй

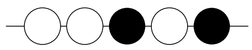


Рис. 3.5. Вместо буквы П рисуем белый кружок, вместо буквы В — черный.

задачей. Узнали! Тут ошибиться нельзя: озарение сопровождается радостным воплем и чуть ли не плясками. На столе всё смешивается, и продолжать дальше становится решительно невозможно. Пора кончать занятие. Теперь можно отступить примерно на месяц, отвлечься, позаниматься другими задачами. Пусть идея уляжется, пустит корни. К тому же однотипные задачи могут надоесть.

Обозначить. . .

Мы приближаемся к финишу. На столе пять коробок из-под спичек и два шарика: нужно класть эти два шарика в две коробки, оставляя остальные три коробки пустыми (см. рисунок 3.6). И чтоб не повторяться.

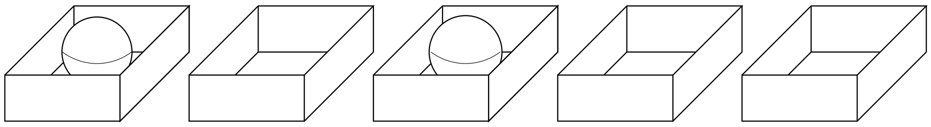


Рис. 3.6. Два шарика нужно положить в пять коробок разными способами. Главная трудность теперь в том, что нужно *помнить* все уже использованные ранее варианты: ведь физически они на столе больше не присутствуют.

Работа начинается вполне бойко, но уже на четвертом или пятом шаге возникает ожесточенный спор, было уже такое решение или нет. Мальчики обращаются ко мне как к арбитру, но я делаю вид, что тоже не помню. Разумеется, с моей стороны это «домашняя заготовка»: вполне можно было набрать достаточное количество коробочек и шариков, разложить коробочки по пять в ряд, и получилась бы в точности та же задача, что и раньше. А сейчас каждое решение приходится сравнивать с теми, которые «были да сплыли». Как же быть?

Между прочим, далеко не каждый ребенок сообразит, что делать в такой ситуации. Нужно *обозначить* каким-то значком пустую коробку и каким-то другим — коробку с шариком, и все найденные решения записывать. Но за этим скромным словечком «обозначить» прячется грандиозная идея, родившаяся и выросшая вместе с человеческой цивилизацией. Достаточно вспомнить во многом еще загадочную историю возникновения письма, эволюцию пиктограмм в иероглифы, иероглифов — в алфавитное письмо и так далее. Сколько существует на свете математика, она всегда занималась изобретением и усовершенствованием систем обозначений — сначала для чисел, потом для арифметических операций, для переменных, и далее — для всё более и более абстрактных сущностей. Уже в XX веке учение о знаковых системах осознало себя в качестве самостоятельной науки — семиотики.

К более серьезному разговору об использовании знаков мы еще вернемся в главе 5 (стр. 170). Пока же скажу лишь то, что на нашем кружке я всегда старался не только решать отдельные задачи, но и формулировать, хотя бы для себя самого, какие-то более общие цели. Знакомство с семиотической идеей — одна из таких «сверхзадач». Мы не раз обсуждали то, что числа обозначаются цифрами, звуки речи — буквами, а, скажем, музыкальные звуки — нотами. Вспоминали и другие системы знаков, например, дорожные знаки. Так что эта идея для моих кружковцев уже не совсем новая. Вот мальчики и предлагают *рисовать* решения. Поначалу они и в самом деле пытаются делать что-то вроде реалистических рисунков; очевидно, они находятся пока на пиктографическом уровне. Но это трудно, и довольно скоро мы переходим на иероглифический уровень: рисунки становятся более абстрактными — теперь пустая коробка обозначается квадратом, а заполненная — квадратом с кружком внутри. Я предлагаю в последнем случае рисовать просто кружок. Очередное препятствие: дети не умеют рисовать аккуратно, и нарисованный ими круг не всегда легко отличить от квадрата. Я делаю еще одно предложение: рисовать круг с крестом. Теперь, после всех этих эволюций, одно из решений выглядит так, как на рисунке 3.7.

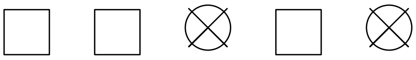


Рис. 3.7. Первая, вторая и четвертая коробки пусты, в третьей и пятой лежит по шарику.

«А почему крестом?» — «А какая разница, как обозначать», — отвечаю я. Это я пытаюсь равнодушным пожиманием плеч еще раз намекнуть на ту идею, про которую специалист по семиотике сказал бы что-нибудь вроде: «Относительная самостоятельность знака по отношению к означаемому и его (в известных пределах) произвольность».

Между прочим, получившаяся задача в одном отношении сложнее предыдущих: теперь каждое новое решение нужно сравнивать не с другими решениями, а с их условными обозначениями. На этот раз мальчики находят всего 9 решений, и после нескольких безуспешных попыток приходят к выводу, что больше решений нет.

И вот, наконец, наступает минута моего триумфа, та, которую я так долго ждал и так упорно готовил. Петя вдруг восклицает, тыча пальцем в лист бумаги: «Ой, смотрите! Пэ, вэ, пэ, вэ, пэ!» Дима вскакивает очень взволнованно: «Да, да, папа, я уже давно хотел тебе это сказать!» — «Значит, должно быть еще одно решение», — подхватывает Женя. «А давайте, — предлагает Дима, — принесем решение *той* задачи и найдем, чего не хватает». У детей всегда — сказано–сделано: он уже бежит в кабинет, чтобы искать там нужные решения. Ходить, однако, далеко не приходится. Подобно известному роялю в кустах, конверт с решениями всех предыдущих задач оказался здесь же, на столе.

◁ Мне было очень обидно, что «ходить далеко не пришлось». Во-первых, я зря пробéгал в другую комнату за решением, а главное, я понял, что никакого открытия не было, а папа всё заранее подготовил. — Дима. ▷

Мы обсудили, какой из вариантов — с буквами, с дорожками или с бусами — удобнее для нас, и выбрали бусы. (Во время работы случился небольшой конфуз. Когда мы раскладывали полоски с «бусами», одна из них случайно перевернулась на 180°. В результате одно из прежних решений пропало, а другое, ему симметричное, оказалось повторенным дважды. Мы едва не запутались.)

◁ Я хотел сказать, что она перевернулась, но не стал, т. к. думал, что, может быть, это всё равно. — Дима. ▷

Почему-то все ребята как один были убеждены, что недостающий вариант обязательно окажется последним. Тем не менее тот факт, что он вышел уже четвертым, нисколько их не обескуражил. Они положили шарики в соответствии с этим новым вариантом, продиктовали мне рисунок десятой строчки, а потом разложили остальные бусы — каждые к своему рисунку. А я закончил задание с чувством абсолютного триумфатора.

То, что произошло сегодня, кажется мне крайне важным. Мы не просто решили задачу. Мы решили ее путем свéдения к другой, изоморфной ей и уже ранее решенной задаче. Это — важнейшая общематематическая идея, и разве не чудо, что нашелся такой материал, на котором эту идею удалось продемонстрировать шестилеткам? Да к тому же так, что они сами до нее додумались!

Доказательства

События на нашем кружке меняются с головокружительной быстротой. Не успели мы разобраться с одной великой идеей, как тут же на подходе другая. Как-то сам собой возникает вопрос: почему каждый раз получается ровно 10 решений? В самом деле больше решений не существует, или мы просто не сумели их найти? Как *доказать*, что их всего десять?

Итак, доказательство. Центральное понятие для всей математики, я бы даже сказал — *формообразующее*, выделяющее математику из всех других наук. Представление о том, что́ является доказательством и что́ не является, эволюционировало на протяжении веков и обрело современный вид лишь приблизительно на рубеже XIX-XX веков. Математикам прошлых эпох, даже самым великим, казались вполне убедительными такие рассуждения, которые сейчас с негодованием отвергнет любой школьный учитель. Если вдуматься, мы имеем дело с очень странным явлением. Почему какие-то абстрактные и порой совершенно «потусторонние» рассуждения делают для нас то или иное утверждение более убедительным? Один очень умный старшеклассник задал учителю такой вопрос: «То, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны, совершенно очевидно — можно убедиться на примерах. Тем не менее нам этот факт доказывают. С другой стороны, то, что электрическое напряжение равно силе тока, умноженной на сопротивление, нисколько не очевидно. Однако этот факт нам почему-то не доказывают, а только иллюстрируют опытами. Почему?» Такой вопрос — редкость. Большинство школьников воспринимают доказательства как некий принятый в математике ритуал. В математике так полагается, и всё тут. Как тут не вспомнить один исторический анекдот, относящийся, кажется, к XVIII веку. Один человек, бравший уроки математики, будто бы сказал своему учителю: «К чему все эти туманные рассуждения! Ведь вы же дворянин, и я тоже. Дайте мне честное слово, что теорема верна — мне этого вполне достаточно».

Но не то же ли самое происходит с нами, когда мы читаем, скажем, учебник истории? Никаких доказательств, одни лишь «формулировки теорем»: было так, было там, было тогда. Точка. И вот оказывается, что «честное слово дворянина» — в данном случае автора учебника — вполне достаточно для того, чтобы всему поверить. На самом деле каждодневная работа математика не так уж сильно отличается от работы историка. Это иллюзия — полагать, что математик находит доказательство и на этом успокаивается, ибо в подавляющем большинстве случаев он производит на свет ложные доказательства. Но он видит, что тем же методом можно доказать, скажем, и иное, заведомо ложное утверждение — и он продолжает поиск, ищет ошибки, ищет противоречия, ищет другие пути к цели. Он *осваивает новую область.* И успокаивается только тогда, когда все части, все детали картины приходят в согласие друг с другом. Примерно такой же гармонии деталей, их согласованности друг с другом ищет и историк, да и любой исследователь. А потом в учебнике нам покажут только кратчайший путь из A в B. Стоит ученику сбиться с этого пути, «свернуть направо на один светофор раньше», и он попадает в совершенно незнакомый район и уже не знает, как оттуда выпутаться. В то время как специалист хорошо знает не только кратчайший путь, но и все окрестности — недаром же он их излазил вдоль и поперек.

Однако дискуссия на эту тему увела бы нас слишком далеко. Поэтому вернемся к детям. Материала, на котором можно знакомить детей с идеей доказательства, не так уж много, но он всё же существует. Например, задачи типа «четвертый — лишний» с неоднозначными ответами. В них важно не только дать ответ, но и правильно его объяснить. Решали мы также и задачи такого типа: доказать, что мы видим глазами, а слышим ушами, но не наоборот (доказательство: если закрыть глаза, мы перестаем видеть, а если закрыть уши, перестаем слышать); доказать, что облака ближе к земле, чем солнце (доказательство: облака заслоняют солнце); доказать, что мы думаем головой, а не животом. Я сам так и не сумел придумать убедительного решения этой задачи[1]; на кружке же я предложил вот какое: если человеку отрубить голову, он перестает думать. Мне возражали, но никто не сказал, что то же доказательство проходит и для живота.

Ну а что могло бы послужить доказательством в нашей комбинаторной задаче? Ясно, что это должен быть *упорядоченный* перебор возможностей, т. е. такой перебор, при котором мы были бы абсолютно уверены, что ничего не пропустили. Год назад мальчики эту идею не восприняли. Может быть, сейчас они уже созрели?

Вернемся к тому обсуждению, рассказ о котором мы прервали на полуслове. Итак, как же убедиться, что, кроме найденных десяти решений, других нет? Дима: «Нужно много лет пробовать, и если ничего не найдешь, значит, и нет». Я возражаю: а вдруг всё-таки есть? Женя пессимистично заявляет: «Я больше ничего найти не смогу». Петя спрашивает у меня, действительно ли я сам не знаю, сколько будет решений, или я-то знаю точно, а спрашиваю только для разговора. Признаю́сь, что сам я знаю точно. Тогда мальчики вообще перестают понимать, чего мне еще надо. Выручил меня

[1] Видимо, такого решения и не существует. Сравнительно недавно я узнал, что древние египтяне, приготавливая мумии, аккуратно сохраняли для будущей жизни все органы человека, и только один мозг выбрасывали за явной ненадобностью.

Дима. Он произнес какую-то фразу... Откровенно говоря, я не очень уловил его мысль, и не очень вдумывался, т. к. думал в этот момент о своем. Но во фразе, которую он сказал, фигурировали слова «самая левая коробочка». Я за них ухватился и поспешил интерпретировать всю фразу в нужном мне направлении. Итак: возьмем первый шарик и положим в первую, самую левую коробочку. Куда теперь можно положить второй шарик? Это ясно: в одну из оставшихся, т. е. во вторую, в третью, в четвертую и в пятую. Итого получаем 4 решения. Исчерпав все те решения, когда первый шарик лежит в первой коробочке, положим его во вторую. И опять для второго шарика остается 4 пустых места: мы можем его положить в любую из четырех коробочек, оставшихся пустыми. Теперь кладем первый шарик в третью коробочку, и т. д. Одним словом, мы получаем 5 раз по 4 решения, то есть... 20 решений! Вот так раз! Мальчики в полном ошеломлении, а я как можно скорее сворачиваю все дела и заканчиваю занятие.

Ну, уж на этот-то раз я бил без промаха. Теперь наверняка все будут думать и разбираться, почему для правильного ответа число 20 еще следует разделить пополам.

[Эх, черт побери! Обидно. Этот невыносимо честный Дима (нынешний) заставляет меня признаться, что я тут слегка приврал. Выдал желаемое за действительное. Я потом ужасно огорчался, что не сообразил поступить на кружке именно так, как написано выше. В реальности я вместо этого я объяснил детям, почему будет именно 10 решений, а вовсе не 20, и почему, положив первый шарик во вторую коробку, уже не нужно класть второй шарик в первую. Жаль, красивая история пропала.

После этого был еще долгий спор с Димой. Я сам его не запомнил и в дневник не записал, но вот что потом вставил туда он сам:

◁ Поначалу папин систематический перебор меня не убедил. То ли в конце занятия, то ли уже после, я стал спрашивать: «А вдруг ты всё-таки забыл один способ?» — «Ну, например, какой?» — «Какой-нибудь». — «Например, в какой коробочке может лежать первый шарик?» — «Не знаю; в какой-нибудь». — «Ну, пусть, скажем, во второй». — «Пусть во второй». — «Но ведь тогда второй шарик может оказаться либо в 3-й, либо в 4-й, либо в 5-й коробочке, а мы все эти способы уже перебрали». И тут я почувствовал (хотя, наверно, не признался бы в этом), что, действительно, для 11-го способа не осталось ни одной лазейки: куда бы мы ни положили первый шарик, всегда получится, что мы все такие способы уже перебрали. — Дима. ▷

Так что, может, я и зря расстраивался. И без того понять мои рассуждения было трудно, а тут бы я нагромоздил одну трудность на другую.]

Физика и логика

Хочу рассказать об одной беседе с Димой. Ему 5 лет и 9 месяцев. Задним числом немножко странно, что с таким в общем-то маленьким мальчиком можно вести разговоры на такие серьезные темы. Однако же вот — есть дневник... (С некоторых пор я стал записывать не только то, что происходило на кружке, но и какие-то смежные истории.)

Началось всё с несколько неожиданной и посторонней для нас темы: есть ли Бог? Я обычно уклонялся от прямого ответа (которого я, впрочем, и не знаю), думал — вот вырастет и сам решит для себя этот вопрос. Стратегия не очень успешная, т. к. общался он не со мной одним. Вот и сейчас — он уже от кого-то узнал, что «Бога нет, потому что его никто не видел». Я, как всегда, увел разговор в свою сторону. Я сказал, что если дело обстоит таким вот именно образом, то он никак не сможет меня убедить в том, что существует *мечта* (ее ведь никто не видел, не правда ли?).

Дима сделал несколько подходов. «А у тебя какая есть мечта?» Я ответил, что никакой мечты у меня нет. «Ну, а что ты больше всего на свете хочешь?» Я отвечал, что ничего не хочу. «Но ты ведь хочешь, чтобы я вырос умным?». Это уже было явное моральное давление, но я устоял: сказал, что вообще ничего не хочу, и всё тут.

На некоторое время он задумался; потом задал тот вопрос, из-за которого я, собственно, эту историю здесь и рассказываю: он спросил у меня, как вообще можно других людей в чём-то убедить. «Есть разные способы, — ответил я. — В математике, например, придумывают *доказательства*». — «Как это?», — спросил Дима. Я напомнил ему нашу совсем еще свежую историю про 10 решений и про то, как мы старались сделать наш перебор *систематическим*, чтобы быть твердо уверенными, что мы ничего не пропустили. «А в физике, — сказал я, — делают опыты». — «А-а, понятно». (К тому времени мы уже читали книгу Л. Л. Сикорука «Физика для малышей» и производили некоторые из описанных в ней опытов.) «Вот, например, такой вопрос: какие предметы падают быстрее — легкие или тяжелые?» — «Конечно, тяжелые падают быстрее». — «Ты та́к думаешь. А другой человек может сказать, что все предметы падают одинаково быстро». — «Ну-у, нет!» — «А почему нет?» — «Ну, ведь если мы возьмем камень и лист бумаги, то камень упадет быстрее». — «Вот видишь: чтобы убедить этого другого человека, что он неправ, ты сделаешь опыт, верно? Возьмешь камень и лист бумаги и посмотришь, что упадет быстрее». — «Да». — «А теперь давай сделаем другой опыт».

Идею этого опыта мне подсказал кто-то из друзей. Сначала мы берем два одинаковых листа бумаги, и они, разумеется, падают одинаково медленно.

После этого я комкаю один из листов и скатываю его в плотный комок. Я хочу спросить, какой из двух листов теперь упадет быстрее, но Дима меня опережает. «А теперь вот этот (он показывает на комок) стал тяжелее». — «Почему!?!» — «Потому что он упадет быстрее».

Вот, оказывается, как обстоит дело. Для того, чтобы физический опыт мог вас в чём-то убедить, нужно сначала, чтобы ваша логика развилась до такого уровня, когда вы осозна́ете недопустимость логических кругов. Без логики никакие выводы из наблюдений сделать невозможно. Что же из них первично, а что вторично? Понятия не имею! Видимо, они вырастают вместе в каком-то симбиозе...

Я, однако, не унимаюсь. Мы продолжаем бросать в паре всё, что попадается под руку: пуговицу и большой тяжелый лист ватмана; пуговицу и гирю; пластмассовый пустотелый кубик и деревянный кубик того же размера, и т. п. Дима обескуражен результатами. Попытался было предположить, что пуговица тяжелее листа ватмана, но быстро отказался от этой идеи перед лицом ее очевидной нелепости. «Значит, бывает по-разному. Иногда легкие вещи падают быстрее, а иногда тяжелые». Он уже почти готов удовлетвориться такой квазитеорией. И вдруг — эврика: «А-а, понимаю, папа! Это ему воздух мешает падать». — «Кому?» — «Лист большой, и ему воздух мешает падать, не пускает его. А пуговица маленькая, ей воздух меньше мешает». — «Правильно! А если бы воздуха не было, что бы тогда было?» — «Тогда бы все падали одинаково». — «Молодец. А когда я лист бумаги скомкал в комочек, что произошло?» Дима подбирает слова, чтобы сформулировать ответ. Я не выдерживаю и отвечаю за него: «Воздух ему перестает мешать». — «Нет, — поправляет меня Дима, — не перестает, а начинает меньше мешать».

Читатель уже знает, что один из моих ведущих принципов — это никогда не «внедрять» в ребенка свою точку зрения, даже намеком. Но в иерархии принципов есть еще один, более важный: никогда не следовать безоглядно ни одному принципу. Может быть, сейчас — удобный момент проявить гибкость? С явным намеком на «единственно правильный ответ» я указываю еще раз на скомканный лист бумаги и говорю: «И что, разве он действительно становится при этом тяжелее?» Дима смеется вместе со мной: мол, ну надо же было сморозить такую глупость! Он отвечает: «Ну конечно же нет! Может быть, только совсем немножечко тяжелее».

Вечером, записывая эту беседу в дневник, я обдумываю ее еще раз. Я неожиданно осознаю одно обстоятельство, которое раньше от меня ускользало. То, что мы произвели, не является в точном смысле слова физическим экспериментом. Эксперимент — это вопрос, заданный природе, *с неизвестным заранее ответом*. А в нашем случае Дима знал все ответы заранее. Не обязательно было реально бросать гирю с пуговицей — собственный опыт жизни ребенка в окружающем его физическом мире оказывался вполне достаточным, чтобы правильно предсказать результат этого опыта. Можно сказать, что ни один из опытов не сообщил ему ничего нового — если говорить только о фактах. Новым было лишь сопоставление и упорядочение известных фактов. По существу, мы произвели то же самое доказательство путем перебора логических возможностей, которое раньше проделали с шариками в коробочках. Данная ситуация проливает некоторый дополнительный свет на то, почему в обучении так полезны вопросы. С помощью вопросов мы помогаем ребенку сопоставить те элементы его жизненного опыта, которые до этого существовали как бы отдельно — лежали в кладовке памяти на разных полках и никак друг с другом не связывались.

* * *

Летом мы снимали дачу в Подмосковье, и к нам в гости приехал Петя. Мальчики вспоминали, как они недавно ходили в зоопарк, и как им показывали обезьян. Я вмешался в их разговор и сказал, что это не им показывали обезьян, а их показывали обезьянам. Такая инсинуация с моей стороны не могла не вызвать решительный протест, но они не сразу нашли, что ей противопоставить. «Мы на них смотрели». Такой аргумент разбить легче легкого: «Ну и подумаешь, смотрели! Они тоже на вас смотрели». Второй аргумент был гораздо серьезнее: «Мы можем ходить где хотим, а обезьяны не могут. Они в клетке сидят». Но я и на это нашел, что возразить. «Нет, вы хóдите не где хотите. Например, вам нельзя ходить внутри клетки. А обезьянам нельзя снаружи. Просто есть решетка, и обезьяны ходят где хотят с одной стороны решетки, а вы — с другой». Так мы еще спорили некоторое время, и вдруг Дима воскликнул радостно, как бы поймав меня на подвохе: «Ой, папка! Ведь это же мы опять математикой занимаемся!»

Интересная эволюция... На самом первом занятии кружка дети бросились наперегонки считать разложенные на столе пуговицы. Тогда они именно так представляли себе математику — это когда считают. Теперь математика стала для них чем-то вроде логической игры в стиле Льюиса Кэрролла.

* * *

Немного жаль, что я лишил следующую главу некоторых из ее наиболее лакомых кусочков. Но, во-первых, хотелось показать материал в новом разрезе: читателю трудно было бы самостоятельно уследить за развитием сюжета, прыгая от раздела к разделу. И, во-вторых, то, что я рассказываю в начале этой главы, относится к *незаписанному* периоду, т. е. вообще осталось бы за кадром. Будем надеяться, что кое-что интересное для следующей главы еще осталось.