Глава 4.

Кружок с мальчиками — второй год

Занятие 33. Подобие

19 сентября 1981 (суббота) $11^{05} - 11^{50}$ (45 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Первый звонок. Дети приходили к нам в дом не одновременно. Пока одного из них не хватало, двое остальных начинали играть, потом к ним присоединялся третий — и оторвать их от игры порой было нелегко. Решение нашлось не там, где мы его искали. У нас сломалась кукла-неваляшка, и от нее остался звонок с необычайно мягким мелодичным звоном. С тех пор достаточно было позвонить в этот звонок — и дети замирали как околдованные, а потом послушно шли на занятие. Только иногда просили разрешения сами немножко позвонить.

Итак, прозвенел первый звонок. Я поздравил всех с началом учебного года, рассказал, что в школе всегда бывает праздник первого звонка.

Задание 1. Устные вопросы.

(1) Два брата, младший и старший, вышли на улицу со своими велосипедами и покатились на пяти колесах. Как это могло получиться?

К моему удивлению, ребята долго не могли придумать правильный ответ, вместо этого они изобретали какие-то четырехколесные велосипеды. Потом Дима догадался.

◁ На самом деле я догадался давно, но не говорил, потому что никогда не видел чтобы кто-нибудь катался на трехколесном велосипеде на улице. Так что правильный вариант я отмел, а потом вслед за всеми стал придумывать варианты с одноколесными велосипедами. Потом я вспомнил, что одноколесные велосипеды видел только в цирке, так что это еще более невероятно, чем трехколесные, и тогда сказал первоначальный вариант. — Дима. $\triangleright$

(2) Упрощенная «дурацкая штучка» Смаллиана (название дано самим Смаллианом): я показываю сжатый кулак и говорю: «У меня здесь две монеты, дающие вместе 3 копейки, но *одна из них — не копейка*. Что это за монеты?» [Разгадка в том, что хотя одна из них — не копейка, зато другая — копейка.]

Результат опять обескураживающий. Сначала дети никак не могут придумать вариант, дающий в сумме 3 копейки. Потом, когда наконец Дима предлагает 1 коп. + 2 коп., все уже давно забыли про второе условие. Я пытаюсь его напомнить: «Но ведь сказано, что одна из них не копейка». — «Да, — говорит Дима, — не копейка, а монетка». Я открываю ладонь, спрашиваю: «Верно, что одна из этих монет — не копейка?» — «Да». — «И где же она?» Ребята указывают на 2 коп., не выказывая ни малейшего удивления. Мне приходится отступить.

Задание 2. Операции над множествами.

На двух больших карточках нарисованы два множества предметов — A и B. На пяти карточках поменьше нарисованы множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$. Я каждый раз говорю, какую карточку надо найти. Например: «где нарисованы те предметы, которые есть на на картинке A и которых нет на картинке B?», «где нарисованы те предметы, которые есть и на той, и на другой картинке?» и т. д. Ребята отвечают очень быстро и без ошибок. Довольно трудно выразить обычными словами разницу между объединением и пересечением. В обоих случаях нужно говорить: это те предметы, которые есть и там, и там.

Дима говорит: «Я вообще не понимаю, почему все эти предметы нарисованы на одной картинке», — т. е. он не понимает, по какому принципу они объединены. Я объясняю, что никакого принципа нет.

Задания на будущее.

(1) Активный вариант: ребята должны не отыскивать карточки из готового набора, а сами их рисовать (для этого элементами множества можно сделать простые значки).

(2) То же, но связать с множеством предметов, раскладываемым на столе в двух веревочных кругах (в качестве элементов множеств можно взять цифры, в качестве предметов на столе — плашечки с цифрами из математического набора первоклассника).

Задание 3. Подобие.

Я рисую на клетчатой бумаге несколько фигурок, а потом такие же фигурки в два раза большего размера (рис. 4.1).

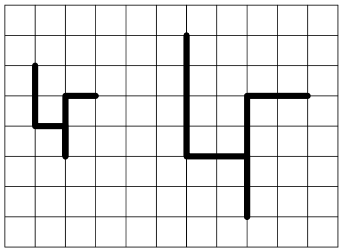


Рис. 4.1. Подобные фигурки: одна вдвое больше другой.

Объясняю, что требуется сделать — предполагается решать задачу на мозаике. Затем по очереди строю на мозаике фигурки и предлагаю ребятам построить вдвое бо́льшие. Они легко справляются, но я в процессе работы неожиданно понимаю, что плохо продумал задачу. А именно, я замечаю две трудности (дети их не замечают):

1) Они, естественно, каждую фишку заменяют двумя; но как тогда поступать с угловыми фишками? Ребята их тоже удваивают, но результат зависит от того, с какого конца они начинают работу (рис. 4.2).

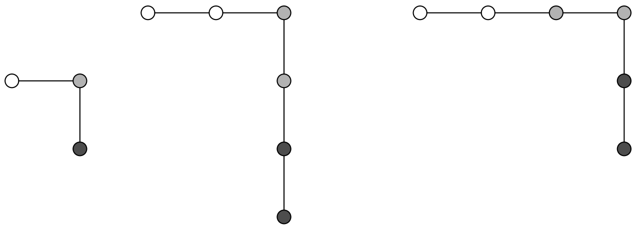


Рис. 4.2. Как удвоить уголок на мозаике?

2) Точки-фишки можно по-разному собирать в «созвездия», то есть по-разному интерпретировать в виде линий; так, я построил для Жени фигурку из 6 фишек, показанную на рис. 4.3 слева, но Женя воспринял ее иначе (на том же рисунке справа), и именно такую фигурку стал удваивать.

Я честно обсудил с ребятами обе трудности, сказав, что в следующий раз то же самое задание будет на клетчатой бумаге, и тогда никаких двусмысленностей уже не останется.

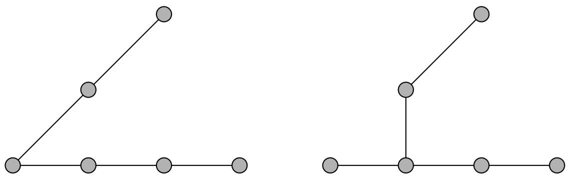


Рис. 4.3. На мозаике имеются только «точки», но, чтобы удвоить фигурку, их надо мысленно соединить линиями; однако сделать это можно по-разному.

Задание 4. «Более вероятно», «менее вероятно» (игра с фишками).

Я говорю: «И, наконец, последнее задание...» Ребята меня перебивают: «Почему последнее? Мы хотим еще!» Ах, бальзам на раны! После того страшного удара, когда они от меня сбежали, мне так необходимы эти подкрепления!

На столе «доска» — лист бумаги, расчерченный на клетки, 7×15 клеток. Под клетками по горизонтали подписаны числа от 1 до 15. Играем мы вчетвером (четвертый — я). Каждый получает по три фишки, одну большую и две маленькие, все три одного цвета. Игроки ставят фишки на первой горизонтали. Потом мы все по очереди бросаем две игральные кости, суммируем число очков (заодно упражнение в арифметике!), и та фишка, номер которой совпадает с выпавшей суммой, делает шаг вперед. Выигрывает та фишка, которая первой выйдет на верхнюю (седьмую) горизонталь. Если у игрока выиграла большая фишка, он получает 2 коп., если маленькая — 1 коп.

Цель задания: (а) напомнить о существовании невозможных событий (суммы $1, 13, 14, 15$ невозможны); (б) показать на опыте, что среди возможных событий бывают более вероятные и менее вероятные (некоторые суммы имеют больше шансов выиграть, чем другие).

Игру мы провели два раза, хотя ребята хотели еще. Про невозможные суммы ребята сами не догадались, но я где-то в процессе игры спросил, почему же эта фишка (единица) совсем не двигается, и они всё объяснили (Дима первым дал правильный ответ). После этого я поинтересовался, какие еще комбинации невозможны, и они тоже правильно ответили. Про разновероятность мы ничего не обсуждали, так как не оставалось времени — я решил отложить это на следующий раз. После первой игры Дима сказал, что хочет поставить свою фишку на 6 (цифра, выигравшая в предыдущей игре), однако поставил маленькую фишку. Выиграл оба раза Женя, первый раз на 6, второй раз на 7.

Занятие 34. Без событий

3 октября 1981 (суббота) $11^{05} - 11^{35}$ (30 мин.)
(Дима, Женя)

Петя болеет скарлатиной; из-за этого предыдущая суббота была пропущена. Для того, чтобы, с одной стороны, не получилось месячного перерыва, а, с другой — Петя не слишком много пропустил (да и с двумя заниматься менее весело, чем с тремя), мы решили провести в промежутке одно занятие, чтобы вышло два интервала по две недели. Таким образом, следующее занятие планируется на 17 октября.

Задание 1. Устные вопросы (из В. А. Левина) типа: у человека — рука, у курицы — ? Вопросов задал мало и они были не очень систематичны.

Задание 2. Подобие (удвоение фигурок) — на этот раз на клетчатой бумаге: я рисую фигурку — вроде той, что на рис. 4.4, — а мальчики должны нарисовать вдвое бóльшую.

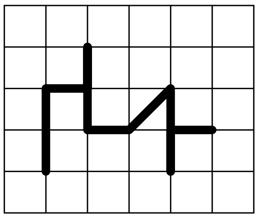


Рис. 4.4. Удвоить фигурку на клетчатой бумаге.

Справляются в целом хорошо, хотя иногда допускают ошибки. Карандаш я им дал с ластиком, и мы им иногда пользуемся. Дима удвоил три фигурки, Женя две.

Задание 3. Снова играем в вероятностную игру. В первой партии выиграл Дима (сумма 5), во второй — я (тоже 5).

На этот раз мы более подробно обсуждали, какие события невозможны, какие числа более выгодны и даже — почему. Я показал им, что числа 2 и 12 можно получить только одним способом, а другие числа — бóльшим количеством способов. Договорились в следующий раз составить «табличку» — т. е. по существу таблицу сложения до 6, а также поиграть еще. Так недолго дойти и до вычисления вероятностей!

Занятие 35. Почти что подсчет вероятностей

24 октября 1981 (суббота) $11^{10} - 12^{00}$ (50 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

17 октября болел Дима, так что в итоге перерыв составил три недели вместо предполагаемых двух.

Задание 1. Устные вопросы. Те же устные вопросы, что и в прошлый раз (с предисловием, что Петя их не слышал). На этот раз прошелся по всему списку примеров, приведенных В. А. Левиным в журнале[1].

Задание 2. Операции с множествами. На одной картинке нарисованы квадрат, крест, круг, звезда и полумесяц; на другой — треугольник, стрелка, крест и полумесяц. У ребят — листки бумаги и карандаши. Требуется по очереди нарисовать пересечение, обе разности, объединение и симметрическую разность множеств.

Ребята справляются с заданием хорошо. Снова в постановке задачи у меня возникла та же проблема, что и в прошлый раз: очень трудно на обычном разговорном языке четко противопоставить объединение и пересечение: «те фигурки, которые есть и здесь, и здесь» — это что, пересечение или объединение? Из-за нечеткости вопроса и дети часто дают противоположные ответы.

Когда рисовали симметрическую разность, Петя нарисовал объединение, а потом пересечение зачеркнул и показал стрелкой, что его надо убрать с листка.

Задание 3. Прямоугольники. Между делом я задал вопрос, сколько прямоугольников нарисовано на такой фигурке (рис. 4.5).

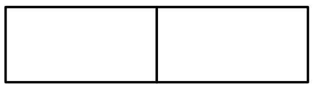


Рис. 4.5. Сколько здесь прямоугольников?

Ребята, конечно, ответили, что их два. Я показал, что их три. Эту тему можно развить.

[1]Типичный случай: не только не помню точной ссылки, но даже и — о каком журнале идет речь. Читатель должен постоянно иметь в виду, что я ни в какой момент не считал себя профессионалом раннего обучения, так что и занимался этим делом не систематически, а как бог на душу положит.

Задание 4. Игра с фишками и почти что подсчет вероятностей.

Мы еще раз сыграли в игру с фишками. Выиграл Женя на 7. В один момент посреди игры, когда фишки выстроились особенно явным клином, как на рис. 4.6, я показал это детям и сказал, что, мол, вот видите, чем ближе к середине, тем больше фишка продвинулась вперед.

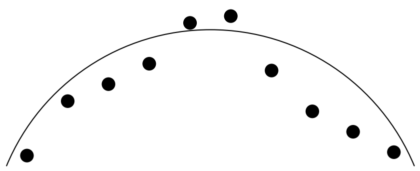


Рис. 4.6. Расположение фишек в процессе игры.

Закончив игру, мы стали составлять табличку: написали все варианты того, что может выпасть на каждом из кубиков, и стали вычислять суммы (табл. 4.1).

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Таблица 4.1. Таблица сложения в пределах шести.

Но почти сразу ребята обнаружили закономерность и диктовали мне содержимое таблицы без всяких вычислений. Потом, когда таблица была готова, я сказал, что мы ничего не вычисляли, а только угадали закономерность, поэтому будет интересно проверить, всё ли правильно. Для проверки мы вычислили содержимое нескольких клеточек и убедились в совпадении.

Еще в процессе составления таблицы Петя заметил, что одинаковые цифры идут рядами, параллельными побочной диагонали. Мы это обсудили все вместе. Я спросил: «Какая цифра встречается чаще всех — какой ряд самый длинный?» Ребята хором ответили: «Шесть». Это значит, они учли также цифры, стоящие за разграничительной линией таблицы (т. е. не только суммы, но и слагаемые).

◁ Я как раз хотел спросить, считаются ли они, но не успел. — Дима. ▷

Я, конечно, должен был предусмотреть такой исход, и в качестве входов таблицы поставить не цифры, а рисунки граней кубика, как на рис. 4.7.

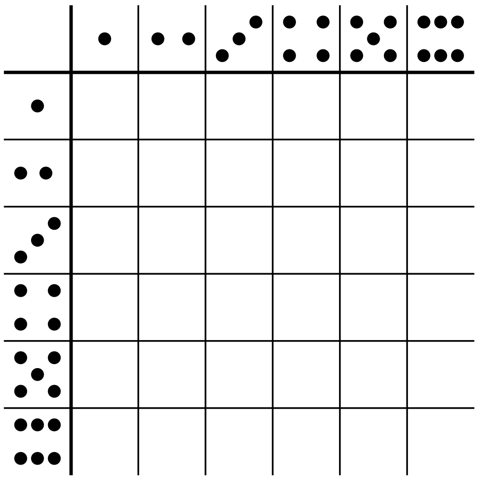


Рис. 4.7. Надо было записывать суммы вот в такую таблицу — тогда не возник бы вопрос о том, какие числа следует учитывать, а какие нет.

Пришлось проводить линию более толсто и объяснять, что внутри таблицы стоят суммы очков на двух кубиках, а с краю — очки на одном кубике, поэтому крайние числа не считаются.

Постепенно мы во всём разобрались и даже угадали закономерность, сколько раз встречаются суммы $2, 3, 4, \ldots, 12$. Результат показан в табл. 4.2.

Сумма	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Сколько раз встречается	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Таблица 4.2. Суммы очков на двух костях и сколько раз встречается каждая из сумм.

(Конечно же, при переходе от 7 к 8 ребята сначала ошиблись и сказали, что сумма 8 встречается 7 раз (вместо 5)).

Наконец, я спросил: «Ну вот, теперь вы знаете, какие цифры выпадают чаще, какие реже. Как бы вы теперь поставили свои фишки, если бы можно было выбирать?» И Дима в ответ поставил большую фишку на 7, а рядом две маленькие — на 6 и на 8. Я его похвалил и объяснил, что всё правильно.

Занятие 36. Игра с тремя костями

31 октября 1981 (суббота) $11^{05} - 11^{50}$ (45 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Игра в цепочку (по В. А. Левину).

Я объясняю правила: нужно по очереди называть слова, причем каждое слово должно быть связано с предыдущим какой-нибудь связью: ассоциативной, предметной, по смежности, по сходству, по контрасту, наконец, рифмой. Вот какая получилась цепочка:

> проигрыватель — иголка — нитка — катушка — подушка — кадушка — вода — дно — песок — камень — спотыкаться — ходить — прыгать — плавать — пузырь — пленка — мыло — картошка — подсолнечное масло — маргарин.

Играли мы вчетвером, с моим участием, а Алла записывала.

Задание 2. Снова два листка, на одном нарисованы цифры $1, 3, 5, 7, 9$, на другом — $4, 5, 6, 7$. Я выкладываю 10 плашек со всеми цифрами из «математического набора первоклассника». Первое задание для всех: выбрать только «нужные» цифры (т. е. объединение), а остальные убрать. Дальше задания по очереди Пете, Диме и Жене: выбрать $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$. После того, как эти три части разложены по отдельности, я кладу на стол два веревочных кольца в виде диаграммы Венна (рис. 4.8) и раскладываю цифры в них. Мы обсуждаем тот факт, что одна веревочка в точности соответствует одному листку, а другая — второму листку, и поэтому само собой получается так, что в общей части оказываются общие цифры, а «здесь» (показываю) только те цифры, которые есть на картинке A и которых нет на картинке B и т. д. и т. п.

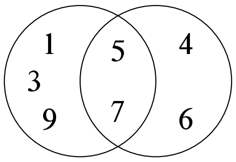


Рис. 4.8. Пересекающиеся множества.

[Надо было проделать то же самое с маленькими карточками из самого первого задания на операции со множествами — там, где нарисованы кошка, яблоко, ваза и т. п.]

Задание 3. Я говорю: «Сегодня мы будем играть в новую игру, в которой нужно будет бросать сразу три кубика. Скажите, какое самое маленькое число может получиться в сумме?» — «Три!» Мы разбираем, как получается три. «А самое большое?» — «Три шестерки!» Мы считаем, сколько это будет.

Я достаю планшетку, на которой в больших клетках нарисованы числа от 3 до 18, как показано на рис. 4.9.

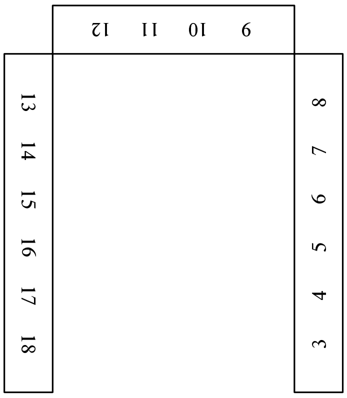


Рис. 4.9. Планшетка для игры с тремя кубиками.

Для красоты сторона 3 – 8 закрашена в желтый цвет, 9 – 12 — в красный, 13 – 18 — в зеленый. Красный цвет для выигрывающей стороны я выбрал нарочно (см. занятие 31, п. 4), и так же нарочно избегал синего. Вот только синестезия желтого цвета мне не ясна.

Я начинаю объяснять правила: каждый садится против одной из сторон (они тут же садятся — Женя против 3 – 8, Дима против 9 – 12, Петя против 13 – 18); каждый получает одинаковое количество жетонов (мы взяли по 9 жетонов); на каждом шаге каждый игрок выставляет по одному жетону; затем бросают три кости, и тот, на кого выпадет сумма, получает все три жетона. Игра идет до «полного разорения» двух игроков (когда все жетоны скопятся у одного их них).

Я показываю, какие у каждого числа, говорю: «У Жени шесть чисел, и у Пети шесть чисел, у Димы, правда, всего четыре числа. . . » — «Ну ничего, неважно», — соглашается Дима.

◁ Мне хотелось скорее начать играть, поэтому я не очень внимательно слушал, что папа говорил. Перед тем, как мы начали играть (и уже после того, как я сказал «неважно»), я понял, что у меня чисел меньше, и я могу проиграть. Но мы начали играть, и я снова забыл. — Дима. ▷

Кости мы бросаем по очереди (и я тоже); тот, кто бросает, должен вычислить сумму. Интересно, что ребята очень охотно (и по многу раз) делают довольно сложные для них вычисления — то, что в другой ситуации они делать ленятся.

Игра длится слишком долго, а конца всё не видно. Поэтому мы договариваемся запомнить, сколько жетонов осталось у каждого, и продолжить в следующий раз. *Осталось: у Жени — 2, у Пети — 11, у Димы — 14.*

[Интересная задача для меня: найти ожидаемую продолжительность игры, а также вероятность «ошибки», т. е. разорения среднего игрока.]

Занятие 37. Сколько прямоугольников?

14 ноября 1981 (суббота) $11^{05} - 12^{00}$ (55 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Предыдущая суббота пропущена из-за праздника.

Задание 1. Цепочка (зарядка для ума):

картинки — краски — кисточки — дерево — корень — сорняк — вода — лед — коньки — кататься — человек — сапог — Италия — карта — стена — дом — нора — хомяк — животное — глаз — очки — лупа — стекло — рама — велосипед — колесо — шина — тормоз — поезд — дым — труба.

Интересно, что даже через 20 лет можно определить, какие ассоциации принадлежат Пете. Сапог — Италия! Сразу видно ребенка из гуманитарной семьи.

Задание 2. Задание с пересечением (не сделанное в прошлый раз). Две большие карточки (задание № 33-2) и маленькие карточки из того же задания. На маленьких карточках нарисованы объединения, пересечения, разности множеств, изображенных на больших карточках. Я кладу две пересекающиеся веревки и прошу ребят разложить карточки так, чтобы внутри одной веревки получилась картинка A, внутри другой — картинка B. То есть, когда ответ будет готов, среди веревок окажутся только карточки $A \setminus B$ (слева), $A \cap B$ (в середине) и $B \setminus A$ (справа) — остальные маленькие карточки потребуются только «для справки».

Сначала, как водится, возникает сумятица: все кладут что попало, спорят, отнимают друг у друга карточки. Потом устанавливается порядок и мы начинаем работать более систематично. Из обсуждения видно, что Дима ничего не понимает; про Женю сказать трудно, так как он ограничивается лишь отдельными замечаниями; один Петя сразу и без слов положил нужные карточки на нужные места.

После того, как правильное решение получено, мы его тщательно проверяем и еще дополнительно выясняем смысл объединения.

Задание 3. Найти все прямоугольники. Все ребята по очереди получают листок с нарисованным на нём прямоугольником, разделенным средними линиями на четыре части (рис. 4.10). Требуется находить и заштриховывать по очереди все имеющиеся на этом рисунке прямоугольники (всего 9 штук).

Рис. 4.10. Найти все прямоугольники (их здесь 9 штук).

Ребята справляются с заданием очень хорошо, практически не допуская ни одной ошибки. Женя первый нашел «оригинальное» решение: заштриховал весь большой прямоугольник тогда, когда не были еще использованы все уголки, и он же первый заштриховал вертикаль из двух частей. Дима, видя, что я похвалил Женю за оригинальное решение, стал искать что-нибудь еще более необычное: сначала заштриховал уголок (рис. 4.11 слева), а потом прямоугольник, ограниченный линией, отсутствующей на рисунке (рис. 4.11 справа).

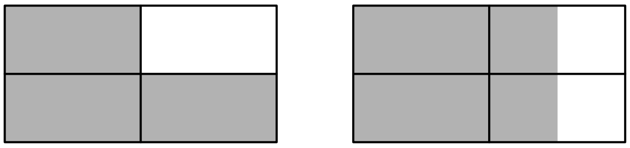


Рис. 4.11. Эти решения неправильны, но... У левой фигуры в самом деле все шесть углов — прямые! Чем не «прямоугольник»?

Я оба решения отверг: про первое объяснил, что это не прямоугольник (мы посчитали углы, и их оказалось шесть), а про второе сказал, что таких решений можно придумать бесконечно много.

Когда все варианты были исчерпаны, я пытался натолкнуть ребят на мысль, что больше решений нет, но ничего не вышло. Тогда я сам им это объяснил, добавив, что самое интересное в задаче — объяснить, почему мы уже нашли все возможные решения и никаких других не осталось.

Задание 4. Доигрывание отложенной партии (в игре с тремя кубиками).

Женя получил свои 2 жетона, Петя — 11, Дима — 14, и мы продолжили игру. Довольно скоро разорился Женя. Теперь Дима и Петя ставили по одному жетону, а выигравший получал два жетона, а не три. (Если сумма выпадала «на Женю», то она не учитывалась.) Тем не менее, игра пошла быстрее, так как теперь Димино преимущество было более явным. Женя продолжал участвовать на общих основаниях в бросании костей и подсчете суммы очков. Когда стало ясно, что Петя близок к разорению, Дима стал изо всех сил «стараться», чтобы сумма выпала на Петю. Это дало мне лишний повод заметить, что исход случайного события не зависит от наших стараний. Наконец, Дима выиграл. Я спросил: «Как же так? Дима выиграл — значит, сумма гораздо чаще выпадала на него, чем на других. А клеточек у него всего четыре, а у других — по шесть». Началось обсуждение. Ребята быстро пришли к выводу, что одни числа выгоднее других, и даже объяснили, что это из-за того, что «комбинаций больше». Мы рассмотрели для примера, сколько комбинаций дают сумму 3, и сколько дают 10. Однако дальнейшие объяснения ребята слушали уже невнимательно, так что на этом я занятие окончил, хотя Петя просил еще и предлагал поиграть с мозаикой.

Занятие 38. Всё валится из рук

29 ноября 1981 (воскресенье) $17^{20} - 17^{50}$ (30 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Одно из самых неудачных занятий.

Предыдущая суббота было опять пропущена, так как я все дни ходил на работу, а в пятницу был урок[2], так что, во-первых, я не выспался, во-вторых, не подготовился. В субботу, 28-го числа, Дима был назначен к зубному; получалось, что придется пропустить еще одно занятие. Тогда мы договорились позаниматься в воскресенье, в 17^{00}. Однако Женя вовремя не пришел, и телефон у них дома не отвечал. Я решил, что его уже не будет, и предложил Диме с Петей снова поиграть в игру с тремя кубиками (см. два предыдущих занятия). Но в самый разгар игры пришел Женя. Пришлось

[2]Реалии тех лет начинают забываться. Я ходил на работу три раза в неделю — остальные два дня были «библиотечными». Но иногда наступал аврал — особенно к концу года, когда надо было писать отчеты. Кроме того, я, как и очень многие в моем положении, подрабатывал репетиторством.

игру прекратить. Дима и Петя ныли; я раздражался. В начале занятия Дима, как это часто с ним бывало, сидел плохо: шатался во все стороны, потом лег на стол. Я сделал ему два замечания, потом вспылил и сказал: «Еще одно замечание — и я тебя выгоню» (сказалось также и то, что за обедом ругались на ту же тему). Дима на глазах прямо посерел и ушел в себя. У меня тоже настроение испортилось: я чувствовал, что поступил несправедливо (не столько в словах, сколько в интонации), и, кроме того, мучился от мысли, что повторение таких сцен может создать у него неприятные подсознательные связи с занятиями, с математикой вообще и т. п. Изо всех сил я пытался к первому заданию привести себя в веселое расположение духа, делал глубокие вздохи, паузы, но это мало помогало.

Задание 1. Игра «Чем свяжешь?» (снова заимствовано у В. А. Левина).

Задаются крайние члены цепочки, надо соединить их промежуточными. Я привел пример: «художник — ? — виноград» (промежуточное звено — кисть). Однако ребята ничего не поняли и стали предлагать свои варианты: «А еще у них общее то, что художник любит виноград». Так продолжалось и дальше. Вопрос: «девочка — ? — трава» (коса); ответ: «девочка лежит на траве». Вопрос: «рыба — ? — кошка» (хвост); ответ: «рыба живая и кошка живая». (Честно сказать, и сам вопрос про рыбу с кошкой — не очень удачный.) И тому подобное. Я говорил, что нужно придумать в качестве ответа одно слово; тогда они вообще замолкали; было скучно.

Задание 2. На какие части можно разрезать прямой линией невыпуклый четырехугольник?

Всего существует 15 вариантов:

(а) два треугольника — 3 способа;

(б) три треугольника — 1 способ;

(в) треугольник и четырехугольник — 6 способов;

(г) треугольник и пятиугольник — 3 способа;

(д) два четырехугольника — 2 способа.

Сначала мы порисовали на бумаге разные многоугольники, считали в них количество углов. Дима по своему обыкновению нарисовал вместо многоугольника ломаную. Я объяснил, что такую фигуру обычно не называют многоугольником, но объяснил как-то сбивчиво и никак не мог придумать «детского» синонима к слову «замкнутый».

Потом я спросил, можно ли назвать многоугольником фигуру, образованную четырьмя дугами (рис. 4.12) (ведь у нее четыре угла!).

Объяснил, что нет.

После этого я дал ребятам вырезанный из картона невыпуклый четырехугольник (рис. 4.13); прямую должна была изображать металлическая

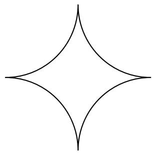


Рис. 4.12. Эту криволинейную фигуру обычно четырехугольником не называют

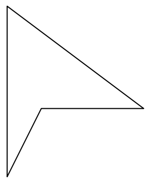


Рис. 4.13. Невыпуклый четырехугольник.

палочка; ребята должны были с ее помощью изображать различные способы разрезания, а я их зарисовывал.

Сначала мне никак не удавалось навести порядок и добиться того, чтобы мальчики дослушали задание до конца: они рвали друг у друга четырехугольник, пытались рисовать на нём карандашом, а когда я отобрал карандаши — пытались царапать на нём палочкой, изображая разрез.

Потом дело неожиданно пошло на лад. Когда ребята наконец поняли суть задачи, они стали очень свободно и изобретательно придумывать разные способы разрезания, не повторяясь и каждый раз правильно определяя, какие многоугольники получаются в результате. Обстановка оживилась.

В этот момент неожиданно позвонил А. В. Ч. Человек очень уважаемый; хоть он меня очень вежливо спрашивал, не занят ли я и могу ли сейчас разговаривать, у меня не хватило духу сказать, что занят. В результате дети прождали меня 10 минут, томясь от безделья, и мамы отпустили их гулять.

Занятие 39. После спада — подъем

5 декабря 1981 (суббота) $11^{20} - 12^{20}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Это занятие, по контрасту с предыдущим, было одним из самых лучших, что видно хотя бы уже по его длительности. Кроме того, я, видимо, был сильно возбужден первым применением своего столь долго вынашиваемого языка программирования «Малыш».

Задание 1. Задачи на доказательство.

(1) Доказать, что мы слышим ушами, а не глазами.

(2) Доказать, что мы видим глазами, а не ушами.

(3) Доказать, что облака ближе, чем Солнце.

Ответы на все вопросы дал Дима, опередив остальных. Подробно писать не буду, так как эти задачи уже обсуждались в предыдущей главе.

Задание на дом: доказать, что мы думаем головой.

Задание 2. Мы вместе со Стёпой[3] изобрели язык программирования для дошкольников (мне кажется уместным назвать его «Малыш»). Так как некоторые стадии его обдумывания связаны с ранними занятиями, не отраженными в дневнике, да и сам язык требует самостоятельного описания, я сделаю здесь длинное отступление.

Небольшой экскурс в прошлое

1. На одном из занятий из числа первых двадцати, не попавших в дневник (точный номер его я не помню — кажется, где-то в районе № 15), дети получили следующее задание: я построил на столе башенку из деревянного конструктора (рис. 4.14) и попросил ребят построить башенку точно такой же высоты, но только на полу.

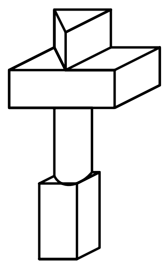


Рис. 4.14. Эта башенка стоит на столе. Как построить башенку такой же высоты, но на полу?

Еще когда Диме было всего три года, я давал ему аналогичное задание на ступеньках крыльца на даче. Тогда он видел свою задачу в том, чтобы вершины башенок находились на одинаковом уровне. Сейчас он, как и все

[3]Степан Пачиков, наш близкий друг; в дальнейшем — организатор Московского детского компьютерного клуба и компьютерной фирмы ПараГраф. Живет в США.

остальные, уже понимал, что высота является инвариантом перемещения. Поэтому он строил башенку примерно нужной высоты, а потом брал ее за верх и за низ и пытался приложить к башенке, стоящей на столе. К его сожалению — и к моей тайной радости — башенка, которую он пытался поднять к столу, всё время рассыпа́лась.

После третьей неудачной попытки я ввел новое правило: башенки не трогать и никуда не переставлять. Последовала минутная пауза. Потом вдруг Дима закричал: «А-а, я понял, понял!», — и построил на полу башенку в точности из тех же элементов конструктора и в той же последовательности, что и у башенки на столе.

Такое решение оказалось для меня несколько неожиданным; я почему-то не предусмотрел его заранее. Тем не менее я, вопреки своей обычной неповоротливости, похвалил ребят и сказал, что они молодцы и с задачей справились (и в самом деле, я ведь вначале никак не фиксировал, из какого материала следует строить башенку на полу).

«А теперь другое задание, посложнее», — сказал я. — «Нужно построить башенку такой же высоты, но только вот из этих (пластмассовых, разноцветных, стандартного размера) кубиков».

Опять воцарилась пауза, на этот раз более длительная. Мне очень не хотелось заканчивать задание на минорной ноте, поэтому я, вопреки своему правилу, решил сделать подсказку. Как бы невзначай я положил на стол веревочку и сказал: «Думайте, думайте». Они тут же схватили веревочку и стали ее вертеть по-всякому, но как ее применить, не знали; в основном, прикладывали ее концами к вершинам обеих башен. Тогда я принес палочку и сказал: «Может быть, палочка поможет». Но и палочка не помогла — они тоже прикладывали ее к вершинам, получая наклонную линию. Пришлось дать еще одно наводящее соображение: «А что выше — палочка или вот эта башенка?» Оказалось, что палочка выше, но зато на ней есть царапина ровно в том месте, где кончается башенка. Это, наконец, натолкнуло на идею, и ребята построили вторую башенку на полу ростом до той же царапины.

2. Примерно через три занятия мне пришла в голову замечательная идея: оформить процедуру построения башенки в виде алгоритма. Вот как это реально выглядело.

Во-первых, я еще раз дал им задание на построение башенки. На этот раз они справились с заданием идеально и быстро, что, кроме всего прочего, продемонстрировало хорошее усвоение материала. «А теперь, — сказал я, — давайте подумаем, какие действия мы делаем и в какой последовательности». И, конечно, получил естественный ответ: «Сначала ставим несколько кубиков, потом измеряем, и тогда один кубик или прибавляем, или убавляем» (действительно, при первоначальном построении башенки на глаз они ошибались не более чем на один кубик). Я стал нудеть, что надо разбить задачу на самые маленькие действия, например, ставить всего по одному кубику, а не сразу много и т. п.

После этого я им показал вырезанные заранее карточки из плотной бумаги. На них было (Аллой) нарисовано следующее:

1) прямоугольная карточка: мальчик ставит кубик;

2) прямоугольная карточка: мальчик измеряет башенку (на полу);

3) карточка-ромбик: в ней большой вопросительный знак (имеется в виду молчаливый вопрос: ну как, равны?);

4) карточка-прямоугольник поменьше: на ней (печатными буквами!) написано слово КОНЕЦ;

5) еще из той же плотной бумаги был вырезан набор стре́лок — несколько маленьких одинаковых стрелок и одна длинная; на двух маленьких стрелках были написаны слова ДА и НЕТ.

Показав всё это, я спросил, в каком порядке нужно делать нарисованные здесь действия. Такой тип вопросов был уже ребятам знако́м, так как до этого они выполняли два следующих задания:

(А) Определить порядок утренних дел (одевание, умывание, просыпание, завтрак, катание на санках, зарядка, потягивание в кровати и т. п.) — из книги Тамаша Варги «Блок-схемы, перфокарты, вероятности».

(Б) Определить, в каком порядке следует надевать различные предметы одежды и обуви (трусы, майку, носки, ботинки, рубашку, брюки, свитер, шубу, шарф, шапку).

В первом случае получается линейный порядок, или «программа без ветвления», во втором — частичный порядок, или, если угодно, недетерминированный алгоритм.

Поэтому в данном случае ребята правильно объяснили последовательность действий, а когда потребовалось снова вернуться к блоку «мальчик ставит кубик», я жестом фокусника извлек длинную стрелку, и получилась изображенная на рис. 4.15 блок-схема.

3. Сейчас, задним числом, всё изложенное кажется мне не очень удачным. Есть два дефекта в самой реализации: первый — плохо выражена проверка условия; второй — куда-то исчезла операция измерения той башенки, что на столе (ее надо было предпослать первому блоку). Еще более важен другой недостаток — неестественность конструкции. Ребята прекрасно поняли, что́ я делаю, но совершенно не поняли, зачем и почему именно так. Я уже говорил, что реально в жизни они поступали иначе: ставили сразу несколько кубиков, после чего хватало одного-двух измерений.

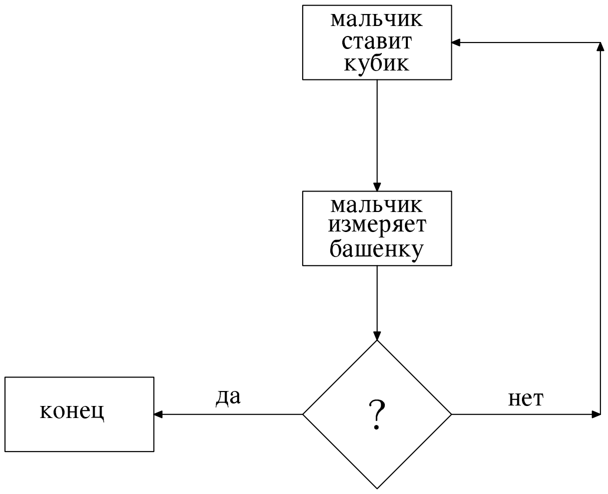


Рис. 4.15. Алгоритм построения башенки нужной высоты.

Тем не менее осталась общая идея — придумывать задачи на построение алгоритмов, и остались также некоторые принципы, сохранившиеся в окончательном проекте.

Принцип 1. Задавать алгоритмы не с помощью какого-нибудь «записываемого» языка программирования (или даже обыденного языка) — ведь ребята ни читать, ни писать не умеют, за исключением самых простых слов, — а задавать их блок-схемами.

Принцип 2. Блок-схемы не рисовать на бумаге — рука у детей очень уж нетвердая, — а выкладывать из готовых карточек. (Самое трудное и обременительное следствие этого принципа — необходимость вырезáть большое количество стрелок разной длины.)

Принцип 3. Операторы и логические условия на карточках должны изображаться не словами, а простыми и понятными картинками. Лучше всего даже — простыми условными значками.

Кроме того, чисто эстетически оказалось очень приятным раскладывать белые карточки на черном лакированном фоне журнального столика.

Однако долгое время я не мог придумать ни одной новой задачи. Идеи приходили в голову разные — от того, как подниматься на нужный этаж на лифте, до того, чтобы вытаскивать из мешка шарики разных цветов и раскладывать по двум урнам. Но всё это были процессы либо плохо алгоритмизуемые, либо неинтересные и неестественные. А идея алгоритмического языка казалась мне совсем недостижимым идеалом: если я не могу придумать *одну* задачу, то что уж говорить о классе задач! К тому же меня несколько угнетала мысль о том, что даже если я придумаю несколько задач, то для каждой из них придется делать новые рисунки.

4. После многочисленных обсуждений со Стёпой современного программирования вообще и программируемых игрушек со встроенными микропроцессорами в частности я сумел, наконец, сформулировать для себя самого (а потом и для Стёпы) главную трудность, главное препятствие на пути создания языка программирования для детей.

Ясно, что этот язык должен быть узким по возможностям, а, значит, и узко специализированным. Все известные мне языки специализируются либо на работе с числами (ФОРТРАН, АЛГОЛ), либо на обработке данных (КОБОЛ), либо на обработке текстов и списков (ЛИСП, СНОБОЛ); кроме того, есть универсальные языки, обладающие всеми тремя возможностями (ПЛ, АЛГОЛ-68)[4].

Однако все эти три области применения программирования совершенно непонятны и неинтересны детям (ближе всего к их интересам стоят числа, но чтобы ощутить смысл задач, подлежащих алгоритмизации, им надо подрасти как минимум лет на пять). Значит, проблема в том, чтобы придумать доступную детям область применения языка. А сам язык — дело второе.

Через два дня после телефонного разговора, в котором я сформулировал Стёпе постановку задачи, он придумал гениально простое решение: в качестве области применения языка он предложил движение объектов по лабиринту, изображенному на клетчатой бумаге. Он же предложил вначале в качестве наиболее простого лабиринта взять прямоугольную комнату.

После этого мы с ним независимо друг от друга придумали совершенно одинаковый язык — даже обозначения все, кроме одного, совпали; такое совпадение служит доказательством естественности языка.

Язык программирования Малыш

Тогда, в 1981 году, уже существовал язык программирования для детей Logo. Он был основан на том же принципе — тоже управлял движениями некоего объекта — «черепашки», но был гораздо более разработан и, главное, реализован на компьютере. Поэтому наша разработка выглядит сегодня чем-то вроде изобретения деревянного велосипеда. Я даже некоторое время

[4]Напомню — этот текст писался в 1981 году.

колебался, не выбросить ли всё это из книги. Потом решил оставить. Очень жалко было бы терять и целый пласт задач, и ту атмосферу энтузиазма, которую породил наш «проект» сначала среди нас — взрослых, а потом этот энтузиазм естественным образом передался детям. К тому же о Logo мы тогда ничего не знали, компьютеров не имели и даже об этом не мечтали; ну, и, наконец, изобретение деревянных велосипедов — это, если вдуматься, не такое уж дурацкое занятие. Надо бы как-нибудь вернуться к этому вопросу.

Перейду к описанию самого языка. Язык допускает расширения; сначала я опишу его основной костяк, а потом возможные расширения.

1. Движущийся объект. Из Диминого деревянного конструктора я склеил стрелку, показанную на рис. 4.16. Она называется роботом. Клетки, в которых помещается такой робот, имеют размер 8 см $\times$ 8 см.

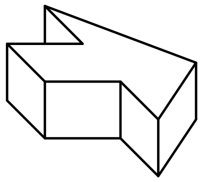


Рис. 4.16. Эта деревянная стрелка зовется роботом. Робот будет двигаться по «клетчатой» комнате.

2. Комната. На большом листе «бумаги для эскизов» поместилась комната 5×7 клеток; естественно, комнату от задания к заданию можно менять.

3. Исполняемые операторы. Их пока четыре: «сделать шаг вперед», «повернуться направо», «повернуться налево», «повернуться кругом». Все повороты делаются внутри одной клетки. Изображаются они так, как показано на рис. 4.17.

4. Логические условия. Их тоже четыре: «стена спереди», «стена справа», «стена слева», «стена сзади». Они показаны на рис. 4.18. (Почти во всех программах использовалось одно лишь первое условие.)

5. Стрелки. Требуются стрелки всех длин, кратных 1, 5 см. На некотором количестве трехсантиметровых стрелок пишутся слова ДА и НЕТ. Следует обратить внимание на то, что каждое их этих слов должно быть написано на стрелках в четырех видах: от головы к хвосту, от хвоста к голове и вверх и вниз по вертикали (рис. 4.19, где показаны только три стрелки из восьми необходимых).

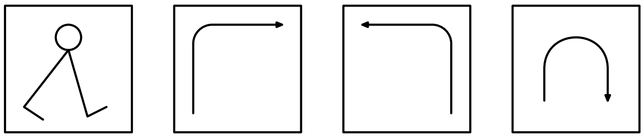


Рис. 4.17. Эти «исполняемые операторы» вырезаются из белого картона. Сторона каждого квадрата — 3 см.

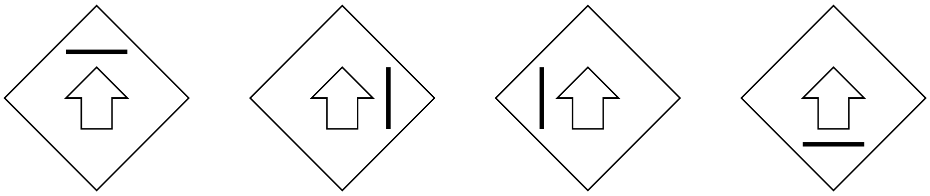


Рис. 4.18. Ромбики проверки условий. Длина диагонали — 6 см.

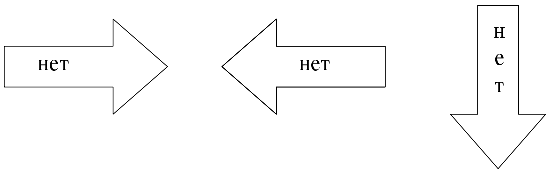


Рис. 4.19. Образцы стрелок, выходящих из «ромбиков» логических условий.

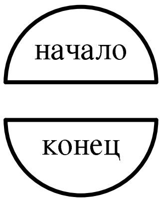


Рис. 4.20. Вся программа располагается между этими полукругами.

6. Начало и конец. Каждая программа начинается полукругом, диаметр которого обращен вниз, и кончается полукругом, диаметр которого обращен вверх. Пока использовались лишь полукруги со словами НАЧАЛО и КОНЕЦ (рис. 4.20). В дальнейшем, когда появится входная и выходная информация, они будут помещаться именно в эти полукруги.

7. Подпрограммы. Пока подпрограммы никак не использовались. В дальнейшем предполагается использовать их следующим образом:

(А) Заводится тетрадь, в которую (на отдельных страницах) заносятся все готовые программы. Каждая программа получает свой *порядковый номер*. Здесь же пишется словесная формулировка задачи — по возможности кратко, печатными буквами (чтобы дети, умеющие читать, могли сами ее прочитать).

(Б) При необходимости использовать в качестве подпрограммы некоторую программу из тех, что записаны в тетради, в блок-схему вставляется большой квадрат 6 см × 6 см с двумя полукругами; внутри большого квадрата просто ставится *номер* программы из тетради (рис. 4.21). При необходимости иметь входные и выходные данные, они записываются в полукругах.

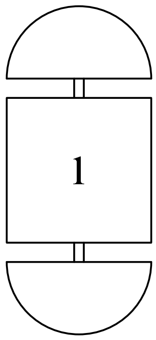


Рис. 4.21. Так будет выглядеть «подпрограмма № 1». Что конкретно она делает, записано в специальной тетради.

Форма элемента, задающего такую вот процедуру-подпрограмму, должна подчеркнуть, что это целая программа, имеющая начало и конец (полукруги) и выполняющая не просто одно действие, а *много* действий (*большой* квадрат). Вообще следует обратить внимание на относительные размеры элементов блок-схем. Правильные пропорции между ними необходимо соблюдать для того, чтобы выкладываемые на столе блок-схемы не оказывались «кособокими».

8. Счетчики. В будущем предполагается расширить язык за счет введения счетчиков. Стёпа предложил организовать счетчик в виде сосуда, в который кладутся шарики. Вопрос об обозначении счетчика на блок-схеме пока не решен. От операторов типа «$i = 1$» я твердо решил отказаться. Сначала у меня была идея обозначить счетчик треугольником с буквой; в блок-схеме приход к треугольнику с буквой А означает: «Положить один шарик в баночку с надписью “А”». Стёпа сказал, что лучше сделать не треугольник, а фигурку, напоминающую по форме тот сосуд, куда кладут шарики. Мысль хорошая, но все баночки и скляночки, оказавшиеся в доступности, имеют цилиндрическую форму, что приводит опять к прямоугольнику. Сейчас я склоняюсь к третьему варианту: на обыкновенном квадрате 3 см $\times$ 3 см нарисовать баночку с надписью “А”, шарик и стрелку, показывающую, куда этот шарик класть. Если потребуются операции вычитания из счетчика единицы (извлечение шарика из баночки), то ее легко изобразить точно так же (раньше я думал переворачивать треугольник вверх ногами). Оба варианта, и старый и новый, показаны на рис. 4.22.

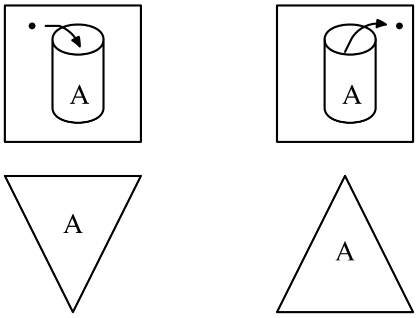


Рис. 4.22. Возможные формы счетчиков.

Введение счетчиков также требует введения новых логических условий: “$А = 4$”, “$А > Б$” и т. д. Только предварительно надо познакомить ребят со значками $=$, $>$, $<$ и проч. Никакой другой арифметики (даже сложения) в языке не предполагается.

* * *

Теперь можно, наконец, вернутся к рассказу о занятии, который я прервал на полуслове.

Сначала, когда я поставил на стол коробку со всеми карточками и стрелочками, дети совершенно затопили меня вопросами, так что я едва успевал вставить слово. Всё же постепенно мне удалось объяснить им следующее.

Сначала я объяснил им, что робот — это механический человек; он может делать разные действия, но, в отличие от человека, у него нет своего ума; поэтому он делает только то, что ему велят, и ничего больше; зато он идеально послушный.

Потом я показал им те действия, которые может делать робот. Выяснилось, что они плохо отличают повороты направо и налево от поворота кругом. Пришлось построиться в шеренгу и поупражняться в военных командах; тогда оказалось, что они правую и левую стороны тоже путают. Однако при выполнении тех же команд с роботом ошибок было меньше, т. к. направление поворота показывали стрелки.

После этого я объяснил им, что у робота нет глаз (так как механические глаза сделать вообще-то можно, но очень трудно), поэтому он может только протянуть руку и пощупать, нет ли стены рядом с ним. Мы взяли ромбики с условиями и стали для разных положений робота проверять, верно или нет изображенное в ромбике условие. Дима очень к месту подсказал, что условие «Стена справа» выполняется и тогда, когда стена с другой стороны, но и робот (стрелка) повернут в противоположную сторону по сравнению с ромбиком (рис. 4.23). Забавно: это означает, что инвариантную (относительно поворотов) структуру понятий «левое» и «правое» он уже усвоил, но пока не может запомнить, что с какой стороны.

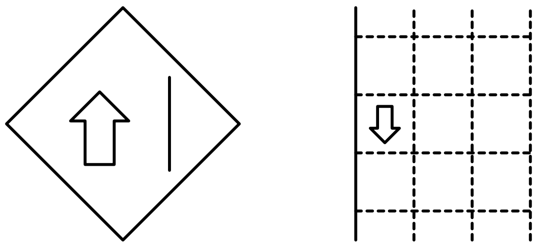


Рис. 4.23. Стена находится справа от робота.

Наконец, я сформулировал задание для робота: дойти до стены и остановиться. Тут же наступила неразбериха: один схватил робота и стал им шагать по «комнате»; другой стал раскладывать карточки по клеткам комнаты; никто ничего не понимал; еще кто-то приставал ко мне, зачем всё-таки нужна такая длинная стрелка.

С большим трудом мне удалось восстановить порядок, объяснить, что блок-схему надо выкладывать не на клетках комнаты, а отдельно на столе, что последовательность действий надо изображать стрелками и что начинать надо с «начала» и заканчивать «концом».

Тогда они мне выложили схему, показанную на рис. 4.24, имея в виду неформально следующие действия: «начать и идти до конца». Я показал им, что при такой программе робот иногда доходит до стены, иногда не доходит, а иногда вообще расшибает нос.

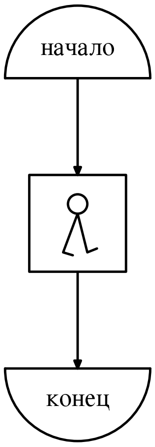


Рис. 4.24. Программа «дойти до стены и остановиться» — *первая попытка* (неправильная). При такой программе робот делает всего один шаг, причем даже не проверяет на всякий случай, нет ли перед ним стены.

Тогда Дима закричал: «А, я знаю, нужно столько вот этих штучек (показал на карточку с шагом), сколько нужно шагов; сейчас скажу: раз, два, три... — пять штук!»

Тут я допустил серьезный педагогический промах, причем, к сожалению, ровно тот же, что меня преследует всё время. Надо было спокойно и без спешки развить эту идею: вырезать из обычной бумаги квадратики, нарисовать человечков и построить все предлагавшиеся схемы. Тогда появление цикла стало бы настоящим открытием. Но я, во-первых, по инерции, во-вторых, с перепугу, что у меня не заготовлено достаточное количество операторов «сделать шаг», попросту отмахнулся от этой идеи на том основании, что программа получается разной для разных клеток, а также очень большой для больших комнат.

После этого мы исследовали возможность обойтись всё же одним оператором шага, возвращаясь к нему с помощью стрелок. Оказалось, что тогда робот каждый раз наталкивается на стену и расшибает нос.

Тогда мы поступили следующим образом: я стал по очереди завязывать мальчикам глаза и просил выполнить в точности то, что требовалось роботу, т. е. дойти до стены и остановиться. Но только перед этим я каждого из них носил с завязанными глазами по комнате и вертел во все стороны, чтобы он не знал, далеко ли до стены. При этом я просил их обратить внимание на то, что каждый из них, прежде чем начать идти, протягивал руку вперед, чтобы проверить, нет ли там стены.

После этого мы пришли к выводу, что первым действием должна быть проверка того, нет ли впереди стены, — и программа была составлена.

В заключение каждый из них прошагал роботом по комнате, строго следуя блок-схеме (если кто-либо начинал баловаться, я особо подчеркивал, что роботы, в отличие от людей, *абсолютно послушны*).

Занятие 40. Появляются блоки Дьенеша

12 декабря 1981 (суббота) $11^{10} - 11^{55}$ (45 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Домокош Саас[5] привез мне из Венгрии в подарок набор разноцветных пластмассовых плашечек, отличающихся друг от друга четырьмя признаками: *цветом* (красный, синий, желтый, зеленый), *формой* (круги, квадраты, треугольники), *размером* (большие и маленькие) и наличием или отсутствием *дырки* — итого $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ штук. Вроде бы именно эти плашечки называются «логическими блоками Дьенеша»[6]. С ними связано первое задание.

Сначала мы обсудили все имеющиеся признаки. Потом я сформулировал задачу:

> Выкладывать цепочку плашечек друг за другом так, чтобы каждая следующая отличалась от предыдущей только одним признаком, а три были общими.

Ребята очень легко справлялись с заданием, а если иногда ошибались, то либо ошибку обнаруживал сам ошибившийся, либо кто-нибудь из остальных. Вскоре выросла цепочка длиной почти во весь стол.

Задание 2. В этот момент мне пришла в голову мысль сделать задание, аналогичное задаче В. А. Левина «чем свяжешь?». Я положил на стол две

---

[5]Венгерский математик, специалист по теории вероятностей. В аспирантуре учился в Москве. Век буду ему благодарен за его подарок.

[6]Золтан П. Дьенеш — один из лидеров «активного», т. е. основанного на конкретной деятельности, математического образования. Сейчас блоки Дьенеша можно заказать по Интернету.

фишки, отличающиеся всеми четырьмя признаками, и сказал, что это начало и конец цепочки, и их нужно связать цепочкой по тому же правилу.

К моему удивлению, и с этой задачей дети справились легко и быстро, совершенно четко с каждым шагом уменьшая «расстояние Хемминга» на единицу.

После этого Женя предложил убрать предыдущую длинную цепочку, а ее концы соединить короткой цепочкой, как в последней задаче. Сделали. Тогда Дима предложил еще соединить между собой концы двух получившихся цепочек (чтобы получился четырехугольник). Сделали и это. «Получился квадрат», — сказали дети. Я объяснил, что это не квадрат, а просто четырехугольник, так как его стороны содержат разное число фигурок (концы двух исходных цепочек отличались не всеми четырьмя признаками). Потом показал, как их можно расположить по кругу. Это им почему-то очень понравилось. Дима еще захотел провести в этом круге диаметр.

Я, однако, его остановил. Возник спор, чем заниматься дальше. Я уговаривал детей, что если мы сейчас переиграем во все игры с этими фигурками, то ничего не останется на следующие разы. Они, тем не менее, хотели еще. Я уж, было, совсем согласился, но тут Петя спросил: «А что — дальше будет про *робот*?» Я сказал, что про робот. Мнения опять разделились: некоторые из тех, кто хотели продолжать заниматься фигурками, теперь захотели играть с роботом; некоторые из тех, кто были согласны закончить, теперь захотели всё же играть с фигурками, так как робот им не нравился. Женя сказал, что ему робот нравится меньше, потому что это трудно (дальнейшее показало, что он прекрасно со всем справляется, так что он, видимо, просто повторял слова Наташи). Я сказал, что втроем им очень трудно договориться, так как все хотят разного, поэтому нужно, чтобы один был главным, и как он решит, так и будет. Главным решили избрать меня, и мы перешли к программированию.

3. Я сформулировал задачу: дойти до стены и повернуться к ней спиной.

Результаты были ошеломляющими.

Дима сказал: «Папа! А ты нам сделай, как было в прошлый раз». Ответить я не успел: Женя и Петя уже хватали какие-то детали, и Дима, испугавшись, что ему ничего не останется, тоже стал хватать.

В мгновение ока они в шесть рук соорудили блок-схему (не для старой задачи, как предлагал Дима, а уже для новой) — сначала с двумя ошибками, но тут же сами их исправили: (1) они забыли две стрелки возврата после «шага» к проверке условия «впереди — стена?», но Женя вспомнил и поставил; (2) Дима хотел к ромбику прицепить третью стрелку, ведущую к «повороту кругом» — как на рис. 4.25; я стал спрашивать, почему повисла без дела стрелка «да», и в каком случае следует идти по третьей стрелке, но еще до того, как я сумел четко сформулировать эти вопросы, Петя сказал: «Это вот сюда надо», — и показал для оператора поворота правильное место.

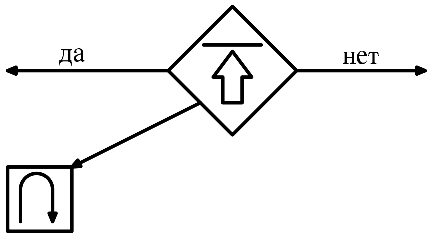


Рис. 4.25. Попытка незаконного использования ромбика с условием: не ясно, в каком случае следует идти по третьей стрелке — если «ни да, ни нет», что ли?

После этого каждый из них выполнил программу, водя пальцем по блок-схеме и шагая роботом по комнате.

Забыл сказать: в начале задания они требовали, чтобы мы снова обязательно ходили с завязанными глазами. Я сказал, что если потребуется — сделаем, а если не потребуется, зачем же? Дети немножко поныли: «Ну-у, а мы хотим...» Но потом в процессе работы никто об этом не вспомнил.

Занятие 41. То же: блоки Дьенеша и робот

19 декабря 1981 (суббота) $11^{10} - 12^{00}$ (50 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Венгерская игра. Я напомнил ребятам предыдущее задание, когда каждая следующая фигурка отличалась от предыдущей всего одним признаком, и предложил строить такую же цепочку, но только следующий элемент должен отличаться от предыдущего всеми четырьмя признаками.

Ребята справлялись с заданием успешно и легко, хотя иногда, конечно, ошибались. Посреди работы Петя заметил, что большие фигурки чередуются с маленькими. Мы обсудили причину (признак «размер» имеет всего два значения — «большой» и «маленький»), обнаружили, что то же самое происходит с дыркой (фигурки с дырками и без дырок чередуются), и потому все большие фигурки в нашей цепочке без дырок, а все маленькие — с дырками. Тогда по моему предложению мы убрали все лишние фигурки (большие с дырками и маленькие без дырок), чтобы легче было разыскивать нужные. После этого работа была быстро закончена.

Затем по предложению Димы мы построили под первой цепочкой вторую, точно такую же, только все фигуры с дырками были заменены на бездырочные, и наоборот. Дима заметил, что по горизонтали у нас получилось «новое задание», а по вертикали — «старое задание» (т. е. отличие ровно по одному признаку).

Картинка получилась такая красивая, что никак не удавалось уговорить детей убрать ее со стола. Особенно упрямился Дима; с ним удалось договориться только после того, как было решено вырезать такие флажки к Новому году и повесить их на елку.

2. Задача для робота: подойти к той стене, которая сзади, и стать к ней спиной (рис. 4.26).

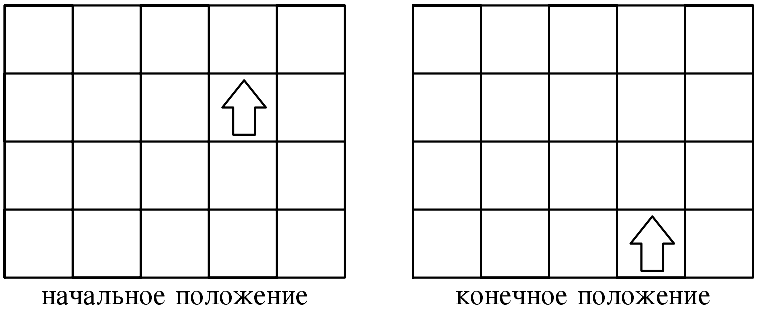


Рис. 4.26. Робот должен перейти из начального положения в конечное.

Сначала я попросил ребят выполнить это задание «вручную», т. е. взять робота в руку и проделать с ним все нужные действия (шаги, повороты и проч.), сам же показал им только начальное и конечное положения. К моему удивлению, правильно всё сделал только Женя (повернулся кругом, сделал два шага, повернулся кругом). Петя же с Димой делали бог весть что: ходили куда-то в сторону и зигзагом, делали много лишних поворотов, делали шаги назад и т. п. — и в итоге оказывались не там, где нужно. То ли они пытались придумать другое задание (Дима это очень любит), то ли мое задание не могли понять — я так и не разобрался. От меня потребовалось известное терпение, чтобы каждый раз объяснять им их ошибки. Наконец, я снова предоставил слово Жене, чтобы он показал всё правильно, но тут и у него произошел сбой и он сделал всё не так, и вообще они, оказывается, уже забыли, в чем задача; всё началось сначала.

◁ Проблема на самом деле была в том, что мне хотелось написать не как можно более простую программу, а как можно более захватывающую: чтобы она делала то, что от нее требуется, но по дороге робот бегал бы по всему полю, как сумасшедший. Приходилось, однако, мириться с простыми программами: у нас и такую-то написать получалось с большим трудом. Только через несколько месяцев нам удалось написать действительно «удачную» программу: она правильно заводила робота в угол, но при этом даже папа не мог понять, как это получается. — Дима. ▷

Наконец, ясность была наведена и мы приступили к программированию. Было испробовано множество вариантов, перечислить их здесь нет возможности. Каждый раз готовую программу мы использовали в деле, т. е. «тестировали», проверяя, что она предписывает делать роботу. Каждый раз, когда программа зацикливалась, это вызывало безумный хохот и общий восторг. Потом, наконец, была составлена работоспособная программа, которая приводила к нужному результату, но не из любой начальной позиции, так как в цикле она сначала делала шаг, а потом проверяла наличие стены (таким образом, если робот в начальной позиции уже стоял у стены, то, повернувшись и попытавшись сделать первый шаг, он расшибал себе нос). Я напомнил детям пословицу «семь раз отмерь, один раз отрежь», объяснил, что нельзя шагать наобум, что перед каждым шагом надо проверять, нет ли перед тобой стены. Однако это не привело к немедленному исправлению ошибки; вместо этого последовала целая серия бессмысленных вариантов, но в результате всё же образовалась правильная программа. В заключение, по образовавшейся традиции, каждый из ребят выполнил всю программу с избранной им самим начальной позиции. На этом занятие окончилось.

Занятие 42. Снежинки

2 января 1982 (суббота) $11^{10} – 11^{55}$ (45 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Новогоднее занятие. Как ни странно, я не планировал как-то связать это занятие с Новым годом (просто не сообразил). Новогодним оно получилось само собой, хотя я и осознал это только после того, как занятие окончилось. Если бы я это понял раньше, можно было бы сделать кое-что гораздо лучше.

Задание 1. Магические квадраты. Петя принес первую в его жизни газету — первый номер «Пионерской правды», в котором была головоломка: в клетках таблицы 4×4 стояли трехзначные числа; надо было их переставить так, чтобы получить магический квадрат с суммой 1982.

Я сказал ребятам, что это задача очень трудная, но зато рассказал им, что такое магический квадрат, потом достал альбом Дюрера, нашел «Меланхолию», сказал, что Дюрер был и художником, и математиком, показал магический квадрат. Потом мы стали проверять его «магичность», для чего сосчитали несколько сумм по строкам и столбцам и по одной диагонали.

Две цифры на картинке были написаны как-то непонятно (я раньше этого не замечал). Я предложил ребятам определить, что это за числа. Никто из них не догадался, что можно из известной суммы в строке (34) вычесть сумму трех известных чисел — и так получить четвертое. Вместо этого они действовали методом проб, однако обычно угадывали требуемое число с одной-двух попыток.

Задание 2. Центральная симметрия.

Я сказал ребятам, что мы с ними уже рассматривали симметрию относительно прямой линии (зеркальца), а еще бывает другой вид симметрии, при котором у симметричной фигуры есть центр. На клетчатой бумаге я нарисовал центр, а потом ставил в разных местах точки, черточки, кружочки — и иногда рисовал симметричную фигуру сам, а иногда давал ребятам. Дима — это начинает входить у него в обычай — вместо того, чтобы выполнить мое задание, сказал, что он сам придумал другое задание[7], и стал рисовать какую-то кривулю, а потом ей центрально-симметричную, но из-за сложной формы кривой и из-за нетвердой руки невозможно было определить, правильно он выполняет задание или нет. С трудом я его уговорил, что его задача очень трудная и нужно сначала научиться решать более легкие задачи.

Потом я предложил ему преобразовать треугольник, и он нарисовал образ не центрально-симметричным, а осе-симметричным, т. е. не перевернул его вверх ногами. Я показал, как надо его рисовать правильно (рис. 4.27), и мы обсудили, почему.

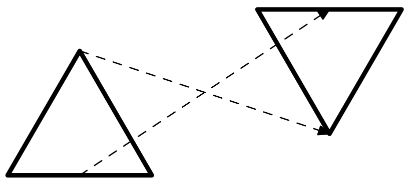


Рис. 4.27. Пример центральной симметрии.

[7]◁ Действительно, я и диссертацию защитил скорее по своей собственной задаче, чем по задаче моего руководителя... — Дима. ▷

После этого я показал ребятам картинки из книги Германа Вейля «Симметрия» и из сборника «Узоры симметрии». Мы отыскивали осе-симметричные и центрально-симметричные фигуры; я сказал, что чем больше у фигуры симметрий, тем она красивее.

Среди картинок мы нашли рисунки снежинок. Дима очень удивился: «Что это, снежинки?» Я сказал: «Да, только сильно увеличенные». Мальчики договорились пойти на улицу с лупой и рассматривать снежинки (к сожалению, ничего путного из этого не вышло, так как снег был слежавшийся).

◁ Потом мы с Петей часто ловили падающие и еще не испорченные снежинки и их рассматривали. — Дима. ▷

Наконец, мы стали строить на круглой мозаике центрально-симметричную фигуру (с учетом цвета фишек). Вот тут бы мне догадаться и построить снежинку! Но вместо этого наша фигура имела только центр симметрии и никаких осей. Ребята справлялись с заданием очень хорошо, ошибок практически не допускали. Боря[8] участвовал вместе с нами.

После занятия, когда мальчики уже одевались на улицу, я рассказал им о Кеплере и о том, что он в качестве новогоднего подарка другу написал математическую работу «О снежинке, или Новогодний дар». Только тогда мне пришла в голову идея о возможности «новогоднего» занятия. На нём можно было бы еще вырезать снежинку из бумаги.

Занятие 43. О некоторых свойствах сложения

9 января 1982 (суббота) $11^{20} - 12^{00}$ (40 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

На этот раз я сказал, что вчера на английском у них было новогоднее занятие; после этого каждый получил в подарок пластмассовую снежинку. Я взял Димину снежинку и всем ее показал; сказал, что наше сегодняшнее занятие тоже будет новогодним.

Задание 1. Симметрии снежинок.

Я сказал ребятам, что снежинка очень красивая, потому что у нее много симметрий, и попросил их показать, какие они видят симметрии. Они нашли не только очевидные оси, идущие *вдоль* лучей, но и менее очевидные, идущие *между* лучами (оси AA и BB на рис. 4.28).

Потом я спросил, есть ли у снежинок центр симметрии. Ребята сказали, что есть. После этого я показал висящую на стене вырезанную Аллой к

[8] Женин папа.

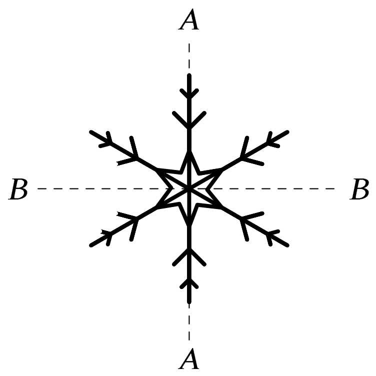


Рис. 4.28. Симметрии снежинки.

Новому году снежинку из бумаги и сказал, что она тоже очень симметричная и очень красивая, только в одном отношении не похожа на настоящую снежинку: у настоящей снежинки всегда бывает 6 лучиков, а у этой — 8. Затем я объяснил, почему снежинку из 8 лучиков легче вырезать из бумаги, чем из 6: три раза сложишь — получится восьмушка. Некоторое время мы поспорили, как надо складывать бумагу, чтобы получилось 6 лучиков. Потом я показал, как это сделать. У Димы затряслись руки — так ему захотелось что-нибудь тут же вырезать. Но я сначала сам решил обрезать край, чтобы из квадрата сделать круг в качестве заготовки; Дима, однако, не дождался, пока я это сделаю, и начал складывать другой лист бумаги, я же, воспользовавшись этим, дорезал снежинку сам. К сожалению, полученная фигура имела всего 3 оси симметрии вместо 6, и поэтому не была центрально-симметричной (рис. 4.29); я не продумал этот вопрос заранее, так как вся ситуация с листом бумаги и с вырезанием произошла экспромтом. Я скомкал эту тему (комкать снежинку не стал) и поспешил скорее перейти к мозаике.

Задание 2. Построение снежинки на круглой мозаике.

Речь идет не о той прямоугольной мозаике, которой мы многократно пользовались на предыдущих занятиях, а о другой, круглой мозаике с шестиугольными фишками. Задание ясно из заглавия: я ставил на мозаику одну фишку, а очередной из мальчиков должен был поставить все соответствующие ей фишки, чтобы получилась снежинка (т. е. если исходная фишка была на луче, то надо было достроить еще 5, а если не на луче, то еще 11, рис. 4.30). Цвет, естественно, тоже учитывался. Дима и Петя делали все правильно, а Женя почему-то всё время допускал одну и ту же ошибку. В

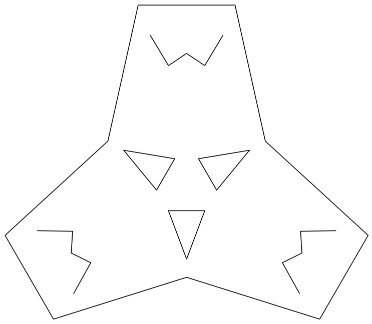


Рис. 4.29. Неудавшаяся снежинка: всего три оси симметрии, а центра симметрии вообще нет. Эту снежинку можно поворачивать на 120°, но повороты мы еще «не проходили».

итоге их деятельности получилась довольно красивая разноцветная снежинка.

Следует обратить внимание на нечеткую постановку задачи: «чтобы получилась снежинка». Для меня это до некоторой степени — вопрос принципа. Четкая и точная постановка потребовала бы разговоров о поворотах, о сразу многих осях симметрии и чуть ли не о группе автоморфизмов, и дети всё равно бы ничего не поняли и не запомнили. Разумный режим работы — это когда понимание условия и необходимые уточнения к нему приходят в процессе решения. Не так ли работает математик-исследователь? Окончательная формулировка задачи становится ясной лишь тогда, когда задача наконец решена.

Рис. 4.30. Если точка лежит на луче снежинки, ей соответствуют еще 5 «таких же» точек; то же самое верно и для точек, лежащих на биссектрисах лучей. В остальных случаях одной точке соответствуют еще 11 «таких же».

Задание 3. Ассоциативность (и коммутативность) сложения.

Я сказал ребятам, что когда они пойдут в школу, они там будут учиться считать, но и сейчас уже... Они меня перебили и стали кричать каждый свое: «А я уже умею, но только до ста» (Петя); «А я только по часам» (Женя); «А я умею считать до очень больших чисел, только я не пробовал» (Дима). По контексту я понял, что они под словом «считать» понимают последовательное перечисление чисел: раз, два, три... Я сказал, что они еще немножко умеют складывать и умножать. Выяснилось, что Петя и Женя не знают, что значит «умножать». Я объяснил, что это значит складывать много раз одинаковые числа, и привел пример.

Но самое интересное, продолжал я, не просто складывать и умножать, а знать некоторые удивительные секреты про сложение и умножение. И вот один из таких секретов я вам сейчас покажу.

После этого мы рассмотрели два примера: $5+6+7$ и $6+8+2$. В каждом из них мы делали сложение тремя различными способами: сначала выбирали два числа и складывали их, затем к сумме прибавляли третье число.

[Надо было начать с коммутативности.]

Каждый раз получалось одно и то же. Я спросил у ребят, почему так получается, и всегда ли будет одно и то же. Без всякого удивления они ответили, что это потому, что мы складываем одни и те же числа, и что так будет всегда. Я назвал три очень больших числа, одно из них с миллионами, и спросил, уверены ли они, что для таких больших чисел тоже всё будет правильно. Мальчики согласились, что для таких чисел это может оказаться и неправильным.

Тогда как же всё-таки объяснить совпадение результатов у нас? Петя снова повторил тот же аргумент: мы складываем одни и те же числа и, значит, делаем одно и то же. — Как одно и тоже? — возмутился я. — Смотри, здесь мы сначала получаем 11 и к нему прибавляем 7, а здесь сначала получаем 13, а к нему прибавляем 5! — Ну и что? — ответил Петя. А мне так хотелось, чтобы они удивились!

Тогда я зашел с другого конца. А что, — спросил я, — если мы делаем одни и те же действия в разном порядке, всегда получится одно и то же? — Да, — сказал Петя. — Ну смотри, Петя, — сказал я. — Допустим, что тебе нужно надеть носки, валенки и галоши. Если ты сначала наденешь носки, потом валенки, а потом галоши, то всё будет хорошо. (Кивок). Ну а если ты наденешь сначала галоши, потом валенки, а потом носки? — Раздался громкий хохот, и мальчики стали наперебой сочинять, что еще можно неправильно надеть. Вот видите, — сказал я, — иногда нужно делать не только правильные действия, но еще и в правильном порядке.

[Следует признать, что пример не совсем честный, так как демонстрирует нарушение коммутативности, а не ассоциативности. Однако коммутативностью сложения мы тоже пользовались, когда складывали два крайних члена суммы, а потом добавляли средний.]

Почему же всё-таки у нас всё правильно? Петя ответил, что ему всё равно всё понятно, только он не знает, как объяснить.

— Ну ладно, — сказал я, — если вы так уверены, что можно складывать числа в любом порядке, то решите вот такую задачу: нужно сложить все вот эти числа — и я разложил на столе карточки с числами от 1 до 9, которые вообще-то предназначались для того, чтобы складывать из них магический квадрат 3×3. Я сказал, что это задача очень трудная, но если они проявят хитрость и придумают, какие числа с какими удобно складывать, то она станет легкой.

Однако ребята всё же стали складывать числа подряд. Считал практически один Дима; Женя иногда подключался, понукаемый Наташей, Петя же только в самом начале закричал: «Получится сто!», — и этим его участие в процессе счета и ограничилось.

Досчитали; получилось 45. Я сказал, что они молодцы и очень хорошо считают, но что хитрости у них всё же маловато, и другим способом можно было бы сосчитать гораздо проще. Дима предложил считать с другого конца (с девятки). — Ну попробуй, будет ли проще, — сказал я. — Девять и восемь легко сложить? — Нет, — ответил Дима, но тут его перебил Женя и сказал, что если считать с другого конца, то будет больше. «Сто! Получится сто!» — обрадованно закричал Петя. (Куда только девалась его уверенность в том, что результат всегда будет одинаковым?) Тогда мы стали всё-таки считать с правого конца; работал опять один Дима, и получилось снова 45.

Поскольку ребята никак не догадывались до разумного способа, я задал наводящий вопрос: «А вот единицу с кем очень легко сложить?» (Прошу прощения у ригористов, я очень люблю делать числа одушевленными.) На это Дима резонно ответил, что ее с любым числом легко сложить. Тогда я нашелся: «А девятку?» Оказалось, что девятку легче всего сложить с единицей — и получить очень хорошее число 10, его можно отложить отдельно и запомнить. Тут ребята сами догадались, что так же можно отделить $2+8$, $3+7$ и $4+6$. Получилось четыре десятки и отдельно 5. «Ну и сколько же получилось в сумме?» — спросил я. «Сто!» — закричал Петя.

К моему удивлению, не одному лишь Пете, но и Диме с Женей тоже было не очевидно, что четыре десятки плюс пять дают 45. Так что пришлось еще кое-что объяснять и наводящие вопросы задавать. То ли они уже устали, то ли задача для них слишком трудна — не знаю. Интересно, как обстояло дело тогда, когда люди еще не придумали позиционную систему счисления. Им тогда не приходилось оперировать с *цифрами*, представляющими собой отдельно десятки и отдельно единицы. Возможно, формальный характер этих операций не заслонял от них сути дела? Но это всё фантазии.

В заключение я пообещал, что в следующий раз мы попытаемся сложить из этих чисел магический квадрат, но сам теперь сомневаюсь, доступна ли для них эта задача. Несколько проб, которые ребята сделали тут же, на месте (без моего участия) скорее убеждают в том, что недоступна.

Вечером Дима подошел ко мне и спросил, как всё-таки — всегда ли будет одинаковое число, если складывать по-разному. Я сказал, что всегда. А знаю ли я сам объяснение? Знаю. Почему же я им не сказал? Потому что хотел, чтобы они сами думали. А когда они сами догадаются, я им скажу? Я ответил, что скажу.

Занятие 44. Магический квадрат

16 января 1982 (суббота) $11^{20} - 12^{20}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Описать это занятие очень трудно. Первым заданием было складывание магического квадрата — и хорошо еще, что я сделал его первым, так как оно растянулось на целый час и оказалось очень трудным. Всё занятие состояло из проб различных вариантов, а также из поиска (с моими подсказками и наводящими соображениями) руководящих принципов перебора. В общих чертах события развивались так.

1) Сначала мы решили выбрать то число, которое должно служить суммой элементов каждой строки и каждого столбца. По предложению ребят было выбрано число 5. Долгое время они пытались получить сумму 5; наконец, пришли к выводу, что это невозможно, однако я потребовал объяснений. С грехом пополам совместными усилиями мы такое объяснение нашли: даже три самых маленьких числа 1, 2 и 3 уже дают сумму большую, чем 5.

2) После этого были перепробованы суммы $6, 8, 10, 12, 13$ — однако каждый раз безуспешно: либо вторую, либо третью строчку сложить не удавалось.

3) Тогда я предложил подумать и понять, какую следует выбрать сумму. Я напомнил им, что в прошлый раз мы подсчитали сумму всех чисел (ребята сами вспомнили, что она равна 45). После этого мы долго методом подбора делили 45 на 3.

4) Найдя нужную сумму, стали складывать строки так, чтобы в них получалась сумма 15. Здесь тоже не обошлось без проб и ошибок, но в итоге

дело было сделано. Особенно ребята обрадовались, увидев, что в последней строчке само собой получилось 15.

5) Далее мы стали, перекладывая цифры только внутри строчек, добиваясь суммы 15 в столбцах. Это тоже удалось.

6) Наконец, мы перешли к диагоналям. В одной из диагоналей сумма сама собой оказалась 15, а в другой — 6. Мы стали переставлять сразу целые строки или целые столбцы, пытаясь получить 15 на обеих диагоналях, но из этого ничего не вышло. Так нам и пришлось удовлетвориться неполноценным решением:

5	9	1
7	2	6
3	4	8

Здесь сказался мой недосмотр: если бы я обдумал задачу заранее, то понял бы, что в центральной клетке может стоять только 5 и ничто иное — и тогда одной перестановкой строк и одной перестановкой столбцов мы бы получили решение:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

На следующий день я рассказал Диме, почему в центре должно стоять 5 (рис. 4.31), и мы с ним сложили настоящий квадрат, но остальным я этого пока не рассказывал.

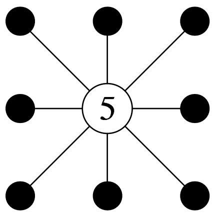


Рис. 4.31. Если догадаться, что в центр квадрата следует поставить 5, то вся задача сильно упрощается: ведь тогда суммы чисел, стоящих в противоположных клетках, должны быть равны 10.

Забыл написать в самом начале, что я показал ребятам перфокарты[9] и некоторое время объяснял, чтó это значит и зачем, и отвечал на вопросы.

Размышляя над этой задачей после занятия, я придумал хорошую задачу для взрослых: построить *мультипликативный* магический квадрат, т. е. квадрат, в котором стоят различные натуральные числа, и *произведения* чисел каждой строки, каждого столбца и обеих диагоналей одинаковы. Вместо того, чтобы требовать, как для аддитивных квадратов, чтобы числа в таблице составляли начальный отрезок натурального ряда $1, 2, 3, \ldots, n^2$ (для мультипликативных квадратов это невозможно), можно потребовать, чтобы произведение было минимальным. «Минимальные» мультипликативные магические квадраты размера 4×4 и 3×3 показаны в табл. 4.3.

1	42	105	10
30	35	14	3
70	15	6	7
21	2	5	210

3	4	18
36	6	1
2	9	12

Таблица 4.3. Мультипликативные магические квадраты. Если перемножить числа каждой строки, каждого столбца, а также двух диагоналей, то каждый раз получится одно и то же число: 44100 для большого квадрата и 216 для маленького.

Еще одно решение для квадрата 3×3 (аддитивного): уменьшаем каждое число на 5; тогда вместо чисел $1, 2, 3 \ldots, 9$ имеем числа $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$, а во всех строках, столбцах и диагоналях должна получиться сумма 0. Ставя в центр 0, симметричные относительно центра клетки заполняем противоположными числами. В итоге имеем, например, вот что:

[9] Прогресс компьютерных технологий идет так быстро, что порой ощущаешь себя настоящим ископаемым: ведь мне еще довелось в молодости работать на вычислительных машинах с *перфолентами*! На практике это означает вот что: работаешь на телеграфном аппарате, который пробивает отверстия в длинной бумажной ленте; после двух часов работы сделаешь одну единственную ошибку — и твою ленту можно выбрасывать. После этого перфокарты воспринимались как технологическое чудо: вместо того, чтобы выбрасывать всю колоду, можно было заменить только одну ошибочную карту. С перфокартами была другая проблема, которой не было с перфолентой: если уронишь колоду карт на пол, как потом собрать их в правильном порядке... Описания всех этапов этой истории хватило бы на целую статью.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & -3 \\ \hline -4 & 0 & 4 \\ \hline 3 & -2 & -1 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & 5 & 5 \\ \hline 5 & 5 & 5 \\ \hline 5 & 5 & 5 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 6 & 7 & 2 \\ \hline 1 & 5 & 9 \\ \hline 8 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Интересное наблюдение в процессе вычислений: Дима полагает, что если каждое из трех слагаемых увеличить на единицу, то и сумма увеличится на единицу.

Занятие 45. Обобщенные цепочки

23 января 1982 (суббота) $11^{10} - 12^{00}$ (50 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Я показал ребятам тот магический квадрат, который сам составил в их отсутствие, а Дима сказал, что, оказывается, в середине обязательно должна быть пятерка. Петя стал водить пальцем вдоль строк и столбцов, приговаривая скороговоркой: «Пятнадцать, пятнадцать, пятнадцать», — однако никакой дальнейшей проверки или обсуждения не последовало, и я не стал к ним приставать, чтобы не впадать в занудство.

Задание 2. Одно из заданий из серии C_5^2, описанных в предыдущей главе: я его здесь не повторяю.

После окончания работы я пообещал ребятам, что как-нибудь в следующий раз дам им задачу, по виду не похожую на эту, а на самом деле в точности такую же, но они об этом не догадаются. Дима очень заволновался и спросил, скажу ли я им об этом *потом*. Я успокоил его, пообещав, что скажу.

Задание 3. «Обобщенная цепочка». На листе бумаги нарисовано несколько кругов, соединенных линиями. Требуется в каждый круг положить по фигурке из венгерского набора так, чтобы в кругах, соединенных линией, лежали фигуры, отличающиеся в точности одним признаком (а в кругах, не соединенных линией, неважно). На этот раз ребята получили две задачи (рис. 4.32).

В первой из задач фигуры, лежащие на лучах, отличаются от центральной фигуры: три — цветом, две — формой, одна — размером, одна — дырочностью (итого семь).

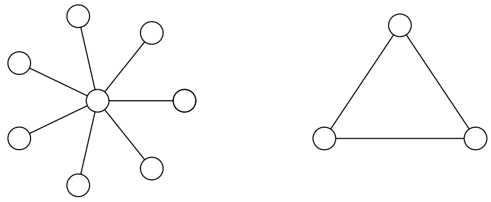


Рис. 4.32. В круги кладутся фигурки из набора Дьенеша; те из них, что соединены чертой, должны отличаться одним признаком; на остальные пары условий нет.

Вторая задача сложней. В ней есть только два типа решений: когда в вершинах треугольника лежат одинаковые фигурки трех разных цветов либо трех разных форм. Поскольку ребята положили сначала в две вершины большую и маленькую фигурки, решение долго найти не удавалось. Пришлось мне провести рассуждение, показывающее, что третья фигурка не может быть ни большой, ни маленькой. Тогда они вторую фигурку заменили, однако заменили ее такой, которая отличалась от первой только дыркой. Опять начались долгие поиски решения, и мне опять пришлось объяснить, что третья фигурка не может быть ни с дыркой, ни без дырки.

Наконец, Дима нашел верное решение, а я показал второй возможный вариант.

На этом занятие закончилось, но мальчики никак не хотели расставаться с красивыми фигурками и попросили разрешения хотя бы самим сложить их в коробку. Я разрешил. Тогда Петя закричал: «Я буду складывать квадраты!», Дима: «А я — круги!», а Женя закричал: «А я — маленькие!». Я воспользовался случаем произвести математическое назидание: «Понимаешь, Женя, если Дима будет складывать круги, а ты — маленькие, то непонятно, кому из вас складывать маленькие круги».

Потом я подошел к ним еще раз и спросил, какие фигурки складывать труднее всего, а какие — легче всего, и почему. После обсуждения я объяснил, что треугольник можно повернуть только тремя способами (чтобы он попал в лунку), квадрат — четырьмя, а круг — бесконечным числом способов. Дима сказал, что самые трудные — одноугольники.

Это занятие имело неожиданное продолжение. Я еще не успел убрать коробку с фигурками, когда с прогулки вернулась Женечка и сразу захотела «в это» играть. Я дал ей задание по ее силам (ей 2 года и 1 месяц) — высыпал все фигурки в крышку и предложил ей укладывать их обратно. Она принялась за дело с большим энтузиазмом. Этот незапланированный «урок математики для двухлетних» продолжался больше часа; рассказ о нём будет в другом месте (стр. 294—296). Я не устаю поражаться тому, как долго может работать ребенок, когда он делает это по собственной инициативе.

Занятие 46. Изоморфизм задач

30 января 1982 (суббота) $11^{00} - 11^{45}$ (45 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Изоморфизм задач. Речь снова идет о серии задач, связанных с C_5^2 — с той разницей, что раньше мы решали каждую задачу саму по себе, а сейчас стали их рассматривать вместе, а также выяснять, чем эти задачи «похожи» друг на друга.

Задание 2. Продолжение задания № 45-3.

Я сказал ребятам: «Вот вы видели, что бывают задачи, которые кажутся разными, а на самом деле одинаковы. А еще бывают такие задачи, которые помогают решать другие задачи. Вот я и хочу вспомнить с вами одну из задач, которые были в прошлый раз — потому что она поможет нам решить сегодняшние задачи». С этими словами я выложил задачу-треугольник (рис. 4.33).

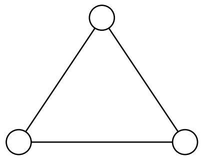


Рис. 4.33. Задача из прошлого занятия, которая сегодня послужит нам чем-то вроде леммы.

Дима тут же сделал ее решение с тремя цветами, после чего Петя и Женя, отталкивая друг друга, выложили еще два аналогичных решения. Я сам напомнил им неизоморфное решение с тремя формами. После этого я дал им собственно задачу — ромб с диагональю (рис. 4.34).

Ребята практически мгновенно нашли решение, я даже не успел им задать тот вопрос, который намеревался: «Понятно ли, чем предыдущая задача помогает решить эту?»

Тогда я выдал следующую фигуру — два концентрических треугольника (рис. 4.35). На этот раз я вопрос задать успел, но ответа не получил, так

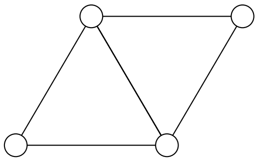


Рис. 4.34. Граф другой, но задание то же, что и раньше: фигурки в смежных вершинах должны отличаться ровно одним признаком.

как все уже были поглощены решением. Пришлось отвечать самому: «Потому что эта фигура состоит из треугольников». К этому моменту Петя уже заполнил внутренний треугольник, а когда я произнес свою фразу (ответ на свой же вопрос) и при этом показал пальцем на задачу с треугольником, где еще лежали неснятые фигурки, Дима вскрикнул: «А!» — и перетащил эти фигурки на внешний треугольник последней фигуры.

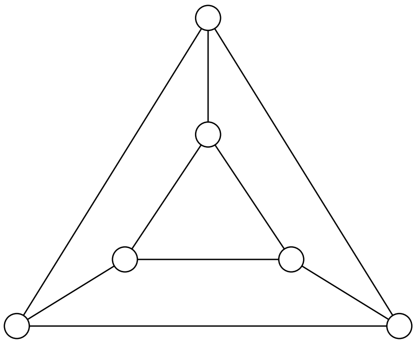


Рис. 4.35. Еще один граф.

Но решения не получилось! Каждый треугольник в отдельности удовлетворял условию, однако связи между большим и маленьким треугольниками получились неверными (отличие более чем по одному признаку). Последовало недолгое размышление и обсуждение — и задача решена. Это задание всё целиком заняло 5 минут.

Задание 3. Магический квадрат.

К этому моменту прошло 35 минут. Я сказал, что ребята — такие молодцы, что решили все мои задачи, так что у меня ничего не осталось, и поэтому урок окончен. Но они запросили еще.

Немного подумав, я сказал, что задач больше сегодня давать не буду, а вместо этого расскажу, какой я придумал простой способ строить магический квадрат — и рассказал тот способ, который описан в самом конце занятия 44 (стр. 144), когда квадрат сначала заполняется пятерками, а потом к противоположным клеткам добавляются противоположные числа. Добавки к 5 я писал на обороте карточек с цифрами. С отрицательными числами никаких проблем не возникло.

Занятие 47. Конец истории про C_5^2

6 февраля 1982 (суббота) $11^{00} - 11^{50}$ (50 мин.)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Квадраты из букв.

Просто так, ради развлечения, я показал ребятам два «магических квадрата» из букв, которые одинаково читаются по горизонтали и по вертикали (рис. 4.36). (Готовясь к занятию, я пытался придумать аналогичные квадраты со словами «ПЕТЯ» и «ЖЕНЯ», но ничего не вышло.) Смысл слов «АГАТ» и уж тем более «АШУГ» пришлось объяснять.

Д	И	М	А
И	Т	О	Г
М	О	Д	А
А	Г	А	Т

С	А	Ш	А
А	Ш	У	Г
Ш	У	Б	А
А	Г	А	Т

Рис. 4.36. Нечто вроде магических квадратов, но не из цифр, а из букв.

Задание 2. Продолжение заданий №№ 45-3, 46-2.

Я сказал: «В прошлый раз вы так быстро решили мои задачи, что я сегодня приготовил вам кое-что посложнее. Если вы и эту задачу решите, тогда я вообще не знаю, что с вами делать. Наверное, просто сдаваться». С этими словами я под изумленные возгласы публики развернул фигуру, нарисованную на пяти склеенных листах, которая едва поместилась на столе (рис. 4.37).

Сначала ребята были немного напуганы, но постепенно дело пошло на лад, и вскоре задача была решена. Два-три раза случались заторы, когда ребята отклонялись от *систематического* пути решения и заполняли не по

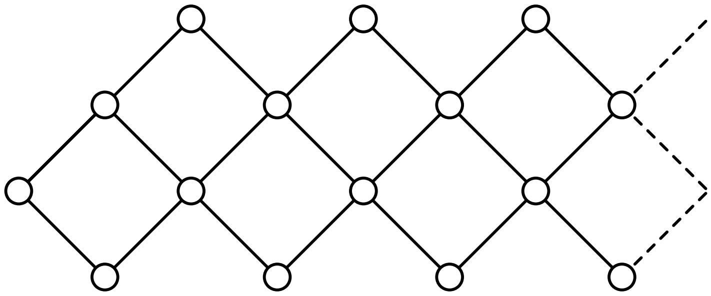


Рис. 4.37. Здесь показана лишь часть графа. Всего в нём 48 вершин — столько же, сколько фигурок в наборе Дьенеша.

две вершины, «подобные» предыдущим, в том порядке, как показано на рис. 4.38 сплошными линиями, а отклонялись от этого порядка, и тогда порой возникали комбинации, не имеющие продолжения. В этих случаях обычно требовалась моя помощь. Несколько раз возникали также ситуации, в которых очередной решающий ставил одну фигурку из двух, а вторая требуемая оказывалась уже занятой. В таких случаях я спрашивал, какая фигурка требуется, и, получив ответ, указывал, что она уже занята. Этой помощи оказывалось достаточно, чтобы дальше ребята находили выход сами.

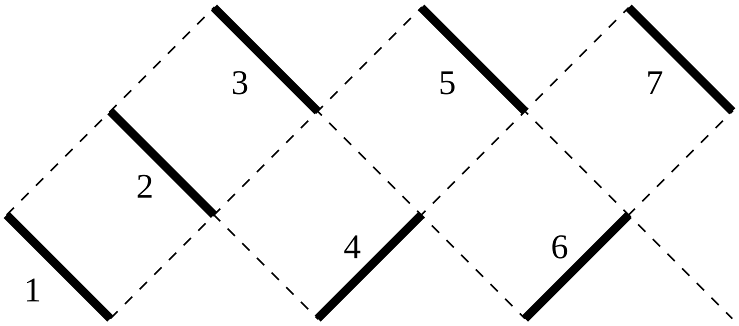


Рис. 4.38. Чтобы решить предыдущую задачу, фигурки лучше всего выкладывать парами. Эти пары показаны на данном рисунке сплошными линиями; очередность пар показана числами. Легко видеть, что каждая пара (кроме самой первой) должна быть согласована всего лишь с двумя уже ранее выложенными фигурками.

Интересно, что во всех задачах этой серии, несмотря даже на мои неоднократные советы, мальчики проявили полную неспособность пользоваться таким тривиальным приемом: при переборе откладывать неподошедшие фигурки в сторону. Они всегда клали их обратно в общую кучу, и после нескольких проб неизбежно начинали повторять уже опробованные раннее и отвергнутые варианты.

Интересно также, что если надо было изменить какой-нибудь один признак, то мальчики чаще всего меняли либо цвет, либо дырку. Реже менялся размер, и еще реже — форма.

Задание 3. C_5^2: последний вариант — шарики в коробочках. См. об этом в главе 3.

4. Доказательство того, что $C_5^2 = 10$. Об этом тоже уже было рассказано там же.

Занятие 48. Истинные и ложные утверждения

20 февраля 1982 (суббота) $11^{20} - 12^{20}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Истинные и ложные утверждения.

Эта задача похожа на уже упоминавшуюся ранее задачу о «мальчиках и девочках в очках и без очков» (см. стр. 52). Однако есть три существенных отличия: (1) утверждения на этот раз касались не детей, а фигурок Дьенеша; (2) в прежней задаче карточки с рисунками были заготовлены заранее, сейчас же я хотел, чтобы ребята выбирали фигурки сами; (3) утверждения я тогда тоже формулировал сам, мальчикам же оставалось только сказать, верно или неверно; в этот раз я рассчитывал, что и утверждения они будут придумывать сами.

Итак, задача состоит вот в чём: один из игроков кладет на стол несколько фигурок из набора Дьенеша и формулирует про них какое-нибудь правильное утверждение. Следующий игрок должен изменить что-нибудь в этом наборе так, чтобы предыдущее утверждение стало неверным, после чего сам сформулировать верное утверждение, и так по очереди. Мне априори казалось, что это простая и естественная игра. На практике всё оказалось иначе.

Сначала я положил две фигурки и предложил Пете сформулировать верное утверждение. Он тут же поставил меня в тупик, заявив: «Они отличаются одним признаком». Увы, мне не к чему было придраться. А когда появилась третья фигурка и я спросил, что теперь означает предыдущее утверждение (кто «они» теперь отличаются одним признаком?), Петя, не смущаясь, ответил, показывая пальцем на фигурки: «Вот эти — одним, и вот эти — одним, а вот эти — двумя».

Дальше — больше. Каждый раз, когда надо было сделать «правильное утверждение», обычно в качестве него следовало что-то вроде: «Здесь есть один большой красный квадратик с дыркой, и еще два маленьких кружочка без дырки — один желтый и один зеленый, и большой треугольник» (на детальное описание треугольника, видимо, уже пороху не хватило). Всё это было в самом деле правильно, но совсем не то, чего я хотел. И сколько я ни уговаривал ребят делать утверждения попроще, ничего не помогало.

[Впрочем, по-видимому, для ребят такие утверждения и в самом деле проще, в том смысле, что требуют меньше интеллектуальной работы. А утверждения типа: «Все фигурки — без дырок», хотя и более коротки, но требуют наблюдательности, обобщения, проверки результата и т. п.]

Не легче обстояло дело и с изменениями набора так, чтобы предыдущее высказывание стало неверным. Тот из детей, чья была очередь, обычно норовил убрать весь набор целиком и заменить его новым, что, конечно, опять-таки было и правильно логически, и «более просто» психологически. Я ничего не мог с этим поделать.

[В следующий раз надо попробовать ввести логические значки и значки для значений признаков и оценивать высказывания по сложности.]

В довершение сказанного я, не выдержав, раньше времени вмешался и стал делать утверждения о пустых множествах. Например, когда не было ни одной красной фигуры, я сказал: «Все красные фигурки — без дырок». Это вызвало бурные дебаты.

Когда-то, когда мы занимались «мальчиками и девочками в очках и без очков», мне показалось, что ребята поняли смысл условных утверждений. Конечно, я в тот момент просто зарвался. Но по крайней мере тогда они мне дружно покивали — а сейчас устроили мне твердую оппозицию и так и не согласились с моими объяснениями. Одним словом, они молодцы. А я? Всё задание превратилось в сплошную неразбериху.

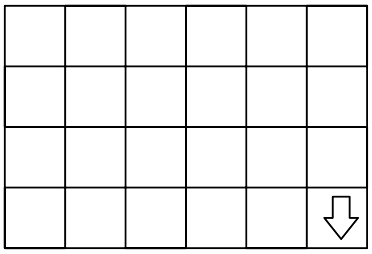
Задание 2. Простые числа.

Мы брали по очереди $1, 2, 3, \ldots, 15$ кубиков и пытались разными способами складывать из них плоские прямоугольники. Таким образом, были получены разложения на множители всех этих чисел. А из простых чисел выходили только полоски.

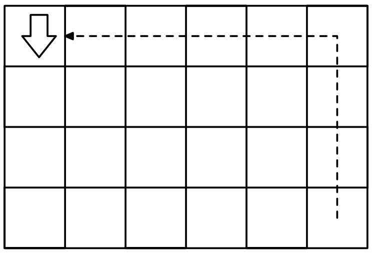
Немного программирования — с одним Димой

Записано 1–8 марта 1982.

Я стараюсь не заниматься с Димой отдельно теми задачами, которые мы проходим на кружке, чтобы не создавать несправедливого перевеса в его пользу, он и без того слегка опережает остальных. Но на этот раз он до такой степени пристал ко мне с просьбой «поиграть в робота», что мне просто некуда было деваться. Задачу он поставил себе сам, показав просто начальное и конечное положения (рис. 4.39).



Начальное положение



Конечное положение

Рис. 4.39. Задача для робота.

В качестве первой попытки Дима повторил программу, которую мы обсуждали на стр. 133—134 (без последнего поворота). Однако испробовав ее (сам), убрал полукруг «конец» и стал добавлять к решению вторую часть. Итоговая программа показана на рис. 4.40.

Фактически ей предшествовало довольно много попыток. В основном все ошибки были той или иной модификацией следующей ошибки. Если надо было произвести какое-нибудь действие, например, «шаг», причем в блок-схеме уже имелся квадратик с оператором «шаг», Дима начинал тянуть стрелку прямо к нему. При этом он не понимал, что после прихода в этот блок ему придется не только сделать шаг, но и последовать по всей цепочке стрелок, выходящей из этого блока. Я попытался объяснить это ему в явной форме, но в следующий раз он вел стрелку к блоку проверки условия или к блоку поворота. Ситуация очень трудная: ведь этому приему я сам их научил, когда советовал вместо пяти операторов подряд «шаг» устроить цикл и возвращаться пять раз к одному и тому же блоку. Выходит, что иногда так можно делать, а иногда — нет, но как провести границу между этими двумя ситуациями, я не знаю. Второй тип ошибки состоял в том, что Дима пытался вывести две стрелки из исполняемого оператора (а не из проверки

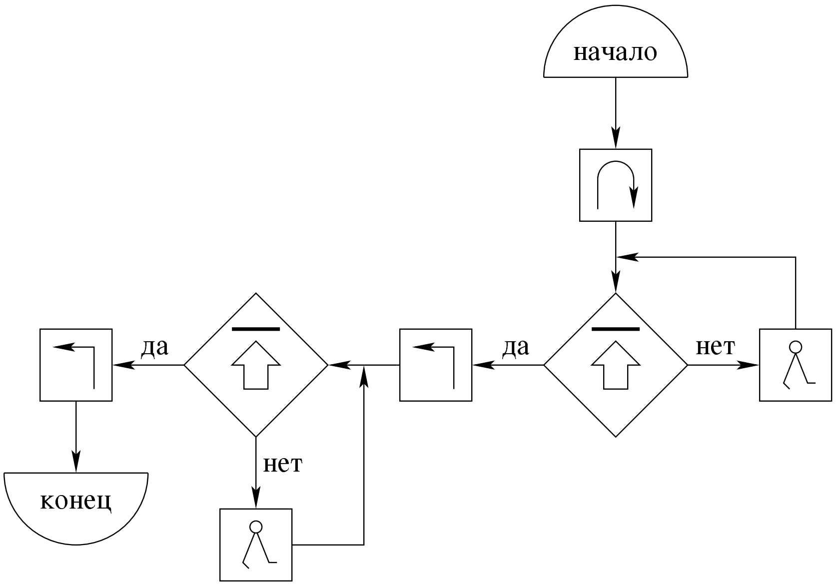


Рис. 4.40. Программа, решающая предыдущую задачу.

условия). Я пытался объяснить ему, что такая программа не имеет смысла, так как не ясно, по какой стрелке идти, но он, видимо, потеряв надежду справиться с задачей, только ныл: «Ну, па-ап! Ну всё-таки давай та-ак!» — «Ну а по какой стрелке ему идти?» — «Вот по этой». — «А когда он дойдет до угла?» — «Тогда по другой». — «А как же он об этом узнает?» — «Я ему скажу...» — «А ты сам как узнаешь?» — «Увижу, когда будет стенка впереди». — «Так почему бы тебе не сделать проверку, есть стена или нет?» — «Но ведь ты же видел, что я делал туда (к первому ромбику) стрелку, и ничего не получалось!» Тут я не выдержал и подсказал ему сделать еще один ромбик. После этого он справился с задачей.

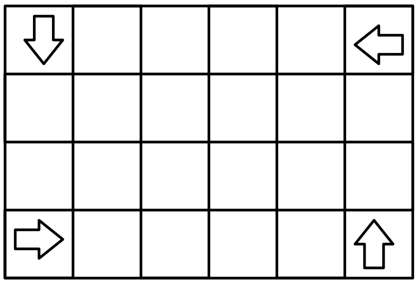
◁ Сам я попросить новые карточки не решался: мне казалось, что ограниченное количество карточек является одним из ограничений языка. Не зря же папа всегда советовал провести стрелку к уже выложенной карточке «шаг», а не класть новую карточку. — Дима. ▷

Кроме того, о чём сказано выше, моя помощь состояла в следующем: во-первых, я вырезáл по его просьбе недостающие элементы; во-вторых, я помогал в отладке (т. е. следил за четкостью исполнения программы); в-третьих, отказывался исполнять синтаксически неверные программы (например, с отсутствующим оператором «конец»).

Постскриптум.

Когда я записывал предыдущий текст, Дима, пробегая мимо, увидел свою программу и решил показать ее Алле. При этом выявились следующие обстоятельства. Во-первых, Дима отказался показывать работу программы по бумаге, а захотел непременно выложить ее из карточек. Видимо, программа, нарисованная на бумаге, кажется ему «ненастоящей». Мои попытки его переубедить ни к чему ни привели. Во-вторых, он обнаружил ошибку в первой версии моего изложения, из-за которой в самом начале программы потребовалось добавить оператор поворота на 180°. Пришлось мне в предыдущем тексте кое-что заклеивать и исправлять. (Здесь приводится уже исправленный вариант.)

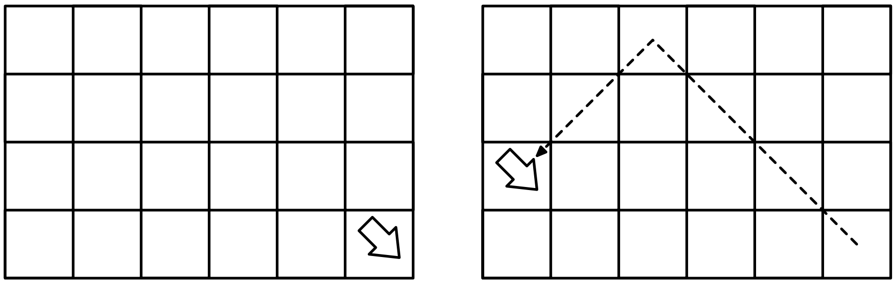
После этого Дима стал пробовать, что получится, если действовать по той же программе, но в начальном положении робот, стоя в той же самой клетке (правой нижней), направлен в другую сторону. Оказалось, что, в зависимости от четырех возможных начальных направлений, робот в конце пути оказывается в каждом из четырех углов, но при этом конечное направление всегда совпадает с начальным (рис. 4.41).



Конечное положение

Рис. 4.41. Вначале робот стоит в одной и той же клетке (правой нижней). Для четырех возможных начальных направлений его конечные *положения* будут такими, как показано на этом рисунке. При этом конечное *направление* всегда совпадает с начальным.

Наконец, Дима испробовал ту же программу еще одним, уж совсем не предусмотренным мной способом: он поставил робота под углом 45° к осям, носом в угол (а потом, соответственно, в направлении, перпендикулярном этому). При этом условие «есть стенка впереди» интерпретировалось вполне разумно и по-житейски: «дальше в том же направлении двигаться нельзя». Один из маршрутов (точнее, начальное и конечное положения) показан на рис. 4.42.



Начальное положение Конечное положение

Рис. 4.42. Исполнение той же программы в непредусмотренном контексте.

В заключение я объяснил Диме, почему всегда сохраняется исходное направление: потому, что три поворота (один на 180° и два на 90° в одну и ту же сторону) делаются *всегда*, независимо ни от каких условий (а шаги могут делаться, а могут и не делаться). Он всё понял и тут же пересказал Алле.

Занятие 49. Повод поразмыслить о знаках

6 марта 1982 (суббота) 11^{10} – 12^{10} (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Верные и неверные утверждения (продолжение).

На этот раз правила изменились: я ввел кванторы[10] $\exists$ и $\forall$, а также значки для значений признаков:

(1) для цвета: четыре бесформенных цветовых пятна;

(2) для формы: □, △, ○;

(3) для размера: Б, М (в смысле — большой и маленький);

(4) для наличия или отсутствия дырки: ⌖, –.

Надо признать, что идея этих значков осталась не очень понятной. То есть, когда дошло до дела, мальчики сравнительно свободно их применяли, но в процессе «придумывания» у нас произошел длинный спор (особенно с Димой как с самым большим любителем придумывать собственные варианты): дети предлагали свои собственные значки. И это было бы, конечно, только хорошо, но беда в том, что все значки, которые они предлагали, были, так сказать, «комплексные», т. е. один значок включал сразу несколько

[10]Значок $\exists$ означает «существует», а значок $\forall$ — «для всех» или просто «все».

признаков (иногда даже все четыре, т. е. по существу полностью описывал конкретную фигурку; я спрашивал, почему тогда уж не нарисовать просто саму фигурку; но эта идея вовсе не казалась им нелепой). Один из значков, предложенных Димой, я изобразил на рис. 4.43 — он означает «большой красный квадрат с дыркой».

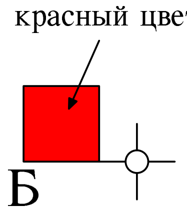


Рис. 4.43. «Комплексный значок», включающий сразу все четыре признака. Использование таких «значков» показывает, что сама идея значка для обозначения не объекта, а *признака*, осталась непонятой.

Я пытался убедить Диму, что такой значок следует засчитывать за четыре, так как он заменяет собой сразу четыре слова; спрашивал: «А что если тебе надо будет просто сказать „красный“, и не говорить, что это — квадрат с дыркой?» Но в ответ получал какой-нибудь другой значок такого же типа. Тогда, чтобы объяснить смысл красного пятна, я выложил все красные предметы вместе и сказал, что нужен один общий знак для них всех. Ответом мне было полное недоумение: как же можно такую кучу нарисовать?

[Всё это, по-видимому, должно означать, что дети пока еще не отделяют признаки от предметов: об этом пишут многие психологи. Видя конкретный предмет, дети, конечно, могут сказать, что он красный, но само понятие «красный», без красных предметов, лишено для них определенного смысла, а потому и не нуждается в специальном значке. Значок должен заменять собой не абстракцию, а что-то весомое, реально существующее. Затронутая здесь проблема более серьезно обсуждается в следующей главе (стр. 170 и далее). А пока пойдем дальше.]

С помощью введенных значков и кванторов мы записывали решения (про каждое множество объектов каждый из нас высказывал по утверждению). При этом каждый получал столько очков, сколько он использовал значков. В конце должен был выиграть тот, кто наберет наименьшее число очков. (Забегая вперед, скажу, что все набрали поровну — 13 очков за 6 утверждений, только я набрал 12 очков.) Действия по изменению набора (так, чтобы предыдущее утверждение стало неверным) мы тоже оценивали: убрать фигурку — одно очко, и добавить фигурку — одно очко.

В таком виде игра явно приобрела бо́льшую осмысленность, однако признать ее удовлетворительной всё же пока нельзя. Главный дефект: все (кроме меня, конечно) пользовались только квантором $\exists$. Это очень легко — просто сказать, что «здесь существует такой-то объект». И потом сделать такое утверждение неверным тоже очень легко: нужно просто этот предмет убрать, и всё.

На следующий раз я обещал ребятам, что мы еще раз изменим правила игры: будем пользоваться только квантором $\forall$, а фигурки можно будет только добавлять. Однако, подумав на досуге, я понял, что это потребует введения остальных четырех логических значков[11]: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$. Наша знакомая Н. Б., которая тоже занимается с детьми, говорила, что у нее это идет успешно. Что ж, попробуем. Или я опять зарвался?

Задание 2. Простые числа (продолжение).

Я подготовил большую красивую таблицу, в которую вошли числа от 1 до 28. Для каждого числа есть специальное место, где записывается разложение его на множители, и отдельная графа «для выводов». На данном занятии мы успели рассмотреть всего 4 числа: $16, 17, 18, 19$. У меня возникло странное ощущение, что ребята не очень хорошо понимают, что происходит. Так, например, Петя, укладывая 19 кубиков в два ряда, положил их так, как показано на рис. 4.44, и сказал: «Не получается». Когда я исправил его, удлинив один ряд и укоротив другой, он сказал спокойно: «Я же говорил, что не получается».

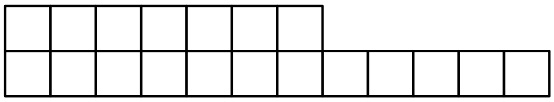


Рис. 4.44. Попытка сложить 19 кубиков в виде прямоугольника.

В одной вещи я очень глубоко неправ и прекрасно это понимаю, но никак не могу с собой справиться. Я почему-то ужасно раздражаюсь от их неумения работать систематично. Вот, например, нужно найти разложение на множители числа 19, т. е. сложить из 19 кубиков прямоугольник. Казалось бы, ежу ясно: нужно сначала попробовать сложить кубики в 2 ряда, потом в 3 ряда, потом в 4 и т. д. Вместо этого Петя сначала пробует 3 ряда,

[11] Логические связки, означающие «и», «или», «не» и «влечет».

потом 2, но не доводит до конца, пытается построить многоэтажную башенку, кто-то разрушает ее случайно, он снова принимается за 3 ряда и т. д. и т. п. Я спрашиваю: «Петя, а ты разве не пробовал уже три ряда?» — «Пробовал». — «Почему же ты еще раз это делаешь?» — «Хочу еще раз проверить». Я едва себя усмирил, но всё же доля язвительности была в моем следующем вопросе (может быть, и сам вопрос возник в результате раздражения): «А ведь правда, ребята, если положить те же кубики по-другому, может быть, получится?», на что Дима заявил: «Папа! Мы ведь этим уже занимались!», — чем немало меня удивил, так как занимались мы этим на самом первом занятии, ровно два года назад.

Тут я еще вставил свою любимую шутку о том, что 5 и 5 на двух руках будет 10, а на одной руке — 9, и показал им это, посчитав пальцы на одной и той же руке от большого к мизинцу и обратно. Но меня раскусили. Однако что делать с числом 19, оставалось неясным — мы ведь так и не попробовали все способы, да и те, что попробовали, уже забыли.

А между тем многократные попытки Пети уложить 19 в три ряда имели под собой очень даже разумное основание. Еще раньше, при обсуждении числа 17, Дима сказал, что ничего не получится, так как 17 — число нечетное, на что Петя совершенно резонно возразил: «Ну почему? Девять же получилось!» — и показал на разложение $9 = 3 \cdot 3$. Потом, когда подошла его очередь заниматься числом 19, Дима снова заявил: «Не получится!», а Петя снова ему возразил: «Получится, получится! Девять же получилось — значит, и девятнадцать получится!» Поэтому-то он и начал с разложения в 3 ряда; но я как-то эту логику проглядел. И даже в самом конце, когда с числом 19 было, наконец, покончено, он в сердцах воскликнул: «Как же так?! Девять получается, а девятнадцать нет!» Мне бы поддержать его склонность к аналогиям, но я ее попросту не заметил, и восстановил только позже, уже задним числом, по памяти.

[Сама проблема — как научить их работать систематично — остается, и она кажется мне очень важной. Это и важный навык сам по себе, и, как мы видели, путь к доказательству. У меня на эту тему нет никаких соображений. Впрочем, Алла считает, что эта проблема решается очень легко: нужно просто подождать лет пять.]

В целом занятие прошло в довольно-таки нервозной обстановке из-за того, что мальчики всё время между собой дрались (все три пары), а также всё время спорили, кто будет первым. Едва ли не треть занятия ушла на то, чтобы их разнимать, пересаживать, улаживать конфликты и проч. Был даже момент, когда я хотел совсем прекратить занятие, до того разозлился.

Занятие 50. Двойной юбилей

21 марта 1982 (воскресенье) $17^{00} - 18^{00}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Это занятие является вдвойне юбилейным: во-первых, оно пятидесятое по счету, а, во-вторых, 23 марта нашему кружку исполняется два года. Обо всём этом я сказал ребятам, что, однако, не произвело на них никакого впечатления. Главная причина в том, что я сам не умею создавать атмосферу праздника — не умею делать артистических жестов и говорить торжественным голосом. Вторая причина в том, что для ощущения праздника нужно о нём знать заранее и ждать его, а я почему-то от ребят это скрыл, надеясь на «сюрприз».

(Номинально мы занимаемся раз в неделю. Фактически же, как легко посчитать, получается раз в две недели — вмешиваются то каникулы, то болезни, то еще что-нибудь. Впрочем, этот ритм совершенно разумен. У французских студентов, например, учебный год делится на два семестра по 12 недель, т. е. почти так же, как у нас на кружке. У студентов, правда, бывают еще две экзаменационные сессии, а у нас нет.)

Всё занятие состояло из того, что я прочитал мальчикам сказку Ежи Цвирко-Годыцкого «Как победить колдунью». Заодно мы решили все задачи, содержащиеся в этой сказке, а также познакомились со знаками $\wedge$, $\vee$, $\sim$ (последний знак в книге обозначает отрицание; более употребительным является знак $\neg$) — они потребуются в следующий раз для игры в верные и неверные утверждения.

В конце занятия я подарил каждому из мальчиков по шоколадке и по блокнотику (поскольку Дима и Петя захотели один и тот же блокнотик, пришлось бросать жребий; выиграл Дима).

Занятие 51. Какая дорожка длиннее?

28 марта 1982 (воскресенье) $17^{00} - 18^{00}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Дорожки из палочек (задача Шеминской[12]).

Имеются две группы палочек: длинные и короткие; отношение длин 7 : 5. Для того, чтобы их было легче отличать, все длинные палочки — красные, а все короткие — зеленые. Все они сделаны из «палочек для счета» (для первоклассников).

[12] Одна из учениц Ж. Пиаже.

Я складываю зигзагообразную дорожку из длинных палочек (рис. 4.45) и прошу ребят сложить дорожку такой же длины из коротких палочек.

Рис. 4.45. Сложить дорожку такой же длины, но из более коротких палочек.

К моему удивлению, никто не стал прикладывать вторую дорожку рядом, под первой. Все они стали строить свои дорожки в разных концах стола, пытаясь имитировать форму моей дорожки. Но поскольку их изобразительные возможности еще ниже логических, у них у всех вышли какие-то жуткие рогули, нисколько не похожие на мою дорожку. Никаких аргументов в обоснование одинаковости длины никто не привел. Иногда кто-нибудь из ребят колебался, добавлять или не добавлять к своей дорожке еще одну палочку.

Надо было что-то обсудить, но я не знал, к чему прицепиться. Всегда, когда в качестве ответа вместо неверного утверждения получаешь бессмысленное, попадаешь в тупик; и сейчас ситуация была аналогичной. Тогда я просто ввел новое условие: все зеленые дорожки должны быть прямыми.

Началось строительство прямых дорожек, но опять никто не построил новую дорожку под старой. Я не выдержал и сказал: «А вот так будет правильно?» — и сам сделал зеленую дорожку из 4 коротких палочек прямо под красной дорожкой, так что концы пришлись к концам (рис. 4.46).

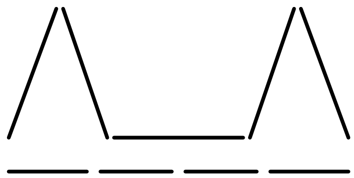


Рис. 4.46. Верно ли, что эти дорожки — одинаковой длины? (Длины палочек подобраны так, что пять длинных палочек равны по длине семи коротким.)

Дима сказал, что так всё будет правильно. Женя сказал: «Неправильно, нужно 5 палочек», — и с этими словами распрямил мою исходную дорожку-зигзаг и стал прикладывать к ней рядом зеленые палочки. Но еще в процессе работы Петя закричал: «Они короткие!» В самом деле, пяти палочек не хватило; Женя поколебался и добавил еще две палочки, стало 7, и дорожки сравнялись.

Тут Дима с подчеркнутой иронией стал говорить: «Да! Конечно! Одинаковые! Вот смотрите: одинаковые!» С этими словами он стал приводить красную дорожку к первоначальному виду. Когда он это сделал, всем пришлось стать лицом к лицу с упрямым фактом: с одной стороны торчала «лишняя» зеленая палочка, а с другой так даже две. «Ну и что?» — сказал Женя, но всё же пошел на компромисс и одну из торчащих «лишних» палочек убрал. Я спросил у Димы, что он об этом думает, и он оставил, как и раньше, 4 палочки.

Тогда я попросил отдельно сложить зеленую дорожку такой же длины, что и красная, *на другом столе*. Произошло небольшое обсуждение между ребятами. Я легким пасом поддержал тот вариант, который был мне выгоден: кто-то из мальчиков сказал между делом: «Их пять штук», а я громко переспросил: «Сколько их?» После этого все единодушно сделали дорожку из пяти палочек. Петя, однако, заявил: «Но они короткие!» Все согласились с ним, что получившаяся дорожка короче, чем исходная.

Наконец-то удобный момент! Я сказал: «А теперь смотрите, что получается. Вот эта дорожка *такой же длины*, и в ней 4 палочки; а вот эта дорожка *короче*, и в ней 5 палочек. Значит, 5 палочек короче, чем 4». — «Ой-ой-ой...», — отреагировал Дима, совершенно потрясенный.

Я предложил ребятам найти выход из противоречия, но никто больше не смог предложить ничего нового. Тогда я просто спросил каждого о его окончательном мнении. Дима сказал, что считает правильным решение с 4 палочками. Петя сказал, что оба решения — и с 4, и с 5 палочками — верные. (Это очень характерно для него. Он всегда прекрасно соображает в начале задачи, но к концу задачи, то ли от усталости, то ли от потери интереса может с легким сердцем сказать что угодно. Я у него спросил: «Значит, дорожки в 4 палочки и в 5 палочек одинаковы?» Нет реакции. «Но ведь ты сам говорил, что эта дорожка *короче*, а теперь говоришь, что это правильное решение». Тоже нет реакции.) Наконец, Женя сказал, что считает верным свое решение, в котором было 7 палочек.

Я никаких комментариев не делал.

[Надо было проделать еще одно упражнение: исходную дорожку из пяти длинных палочек перекладывать так, чтобы расстояние между концами становилось $3, 2, 1, 0$ коротких палочек. Аналог того, как я когда-то раздвигал монеты с пуговицами, постепенно доводя ситуацию до абсурда.]

Задание 2. Снова верные и неверные утверждения.

Продолжение задания № 49-1. На этот раз все утверждения должны были начинаться с квантора $\forall$, а фигурки можно было только добавлять — по одной. Разрешалось пользоваться знаками $\vee$, $\wedge$, $\sim$, которые ребята узнали из сказки о колдунье (см. предыдущее занятие). Довольно скоро мальчики столкнулись с тавтологией; утверждение было верным, но сделать его неверным на следующем шаге не удавалось. (Не помню точно, какое было утверждение, но что-нибудь такого типа: «все фигурки — большие или маленькие».) Мы обсудили ситуацию и договорились стараться не делать тавтологий.

Как я и ожидал, ребята легко путались в значениях связок «и» и «или». Для множества, состоящего из одной зеленой и одной красной фигурки, они говорили: «Все зеленые и красные». Я пытался им объяснить, что утверждение должно быть верно *для каждой отдельной фигурки* (в частности, «зеленых и красных» фигурок вообще не существует). Особого успеха я, конечно, не добился. Петя, например, повторял эту ошибку каждый раз, когда до него доходила очередь, хотя я каждый раз ему всё заново объяснял.

По мере продвижения вперед задача становилась всё более трудной. Я вовремя переключился и стал изобретать верные суждения сам, а ребята должны были только делать их неверными. В таком виде мы играли еще довольно долго. Иногда ребята подсказывали мне верные утверждения, но чаще всего это были тавтологии.

Занятие 52. Разгадка шифра

3 апреля 1982 (суббота) $11^{00} - 12^{00}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Шифр.

Я объяснил ребятам, что такое шифры и для чего их используют (для секретности). Потом сказал, что если человек очень умный, то он может прочитать письмо, даже не зная шифра. («Как это?» — «А вот сейчас увидите».) Мы вспомнили, сколько всего в русском языке букв (33), и сколько есть цифр (10). Затем я сказал, что я взял 10 букв и заменил каждую из них цифрой; еще некоторое время объяснял, почему я не могу все буквы заменить цифрами. «Так во́т, — сказал я, у нас есть четыре слова, написанные таким образом, что буквы заменены цифрами:

$$1234, \quad 5678, \quad 9608, \quad 5454.$$

Кроме того, известно, какие это слова:

ДИМА, ПЕТЯ, ЖЕНЯ, ПАПА

(реально я выдал шифрованные и нешифрованные слова в разных порядках); но только неизвестно, где здесь какое слово. Требуется всё расшифровать, т. е. узнать, какое слово где зашифровано, и какая буква какой цифрой заменена».

Сначала, как и следовало ожидать, дети (точнее, Петя), ни секунды не задумываясь, положили слова из цифр и слова из букв друг к другу произвольно. Я сказал: «Давайте проверять», — и мы стали проверять, всё ли получается согласованно. Но не успели мы начать, как Петя воскликнул: «Вот ПАПА!», — и показал на слово 5454. Я потребовал объяснений, и он, хотя и не очень толково, объяснил, что у этого слова, как и у слова ПАПА, два одинаковых слога. Я повторил его объяснение более толково. Тут Петя сказал: «А вот ДИМА», — и показал на слово 1234. «Почему?» — «Потому что оно кончается на букву А». — «А другие слова не кончаются на букву А?» — «Нет, они кончаются на букву Я». — «А вот это ПЕТЯ и ЖЕНЯ» — вступили в разговор остальные. «Правильно. Нужно только узнать, кто из них ПЕТЯ, а кто — ЖЕНЯ». Тут, наконец, вступил в дело Дима, сказав: «Вот это ПЕТЯ», — и показал на слово 5678. «Почему?» — «Потому что оно начинается на букву П». Таким образом, был раскрыт весь шифр:

$$1 \to \text{Д},\quad 2 \to \text{И},\quad 3 \to \text{М},\quad 4 \to \text{А},\quad 5 \to \text{П},$$

$$6 \to \text{Е},\quad 7 \to \text{Т},\quad 8 \to \text{Я},\quad 9 \to \text{Ж},\quad 0 \to \text{Н}.$$

В заключение я написал детям вот такое письмо:

3434 34967 1236, 5676 2 9606 361 2 1963

(МАМА МАЖЕТ ДИМЕ, ПЕТЕ И ЖЕНЕ МЕД И ДЖЕМ).

Они, хоть и с трудом, но прочли его.

Здание 2. Отчества. В качестве следующей задачи я собирался дать ребятам довольно сложное генеалогическое древо (из 12 клеток), а также 12 карточек, на каждой из которых было написано имя и отчество некоторого мужчины. Требовалось разложить эти карточки по клеткам, ориентируясь на отчества (Степанович — сын Степана). Но сначала я дал тренировочную задачу: даны всего две клетки (отец и сын), рис. 4.47; одного из них зовут Николай Степанович, а другого Степан Петрович; требовалось узнать, кто есть кто.

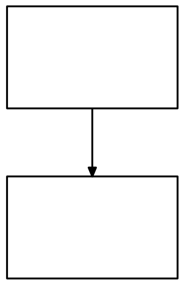


Рис. 4.47. Генеалогическое древо: сверху отец, снизу сын. Одного из них зовут Николай Степанович, другого — Степан Петрович. Кто отец, а кто сын?

Дети, как водится, наобум положили Николая Степановича в отцы, а Степана Петровича в сыновья. Я попытался столкнуть их с противоречием: у *Петровича* отец — *Николай*. К моему ужасу, никто не усмотрел в этом никакого противоречия!

Оказалось, что *ни один из них не имеет ни малейшего представления о том, как получаются отчества.* Дима и Женя вообще не знали, как их зовут по имени-отчеству. Петя знал, что его зовут Пётр Витальевич, но не знал, почему.

Всё оставшееся время я объяснял ребятам, откуда берутся отчества, что такое полное и неполное имя и т. д. и т. п. До самóй задачи мы так и не дошли.

Занятие 53. Генеалогическое древо

10 апреля 1982 (суббота) $11^{00} - 12^{00}$ (1 час)
(Дима, Петя, Женя)

Задание 1. Устный вопрос.

Есть курица, которая весит 2 килограмма. («Ого!»; «Ничего себе!»). Про нее задаются два вопроса:

(а) сколько она будет весить, если встанет на одну ногу?

(б) если она встанет одной ногой на одни весы, а другой ногой — на другие, то сколько покажут каждые весы?

Вопросы мы обсуждали отдельно: сначала все ответили на первый вопрос, всё обсудили, потом последовал второй вопрос. В итоге мнения распределились так:

Женя: (а) 1 кг; (б) 1 кг + 1 кг.

Дима: (а) 2 кг; (б) 2 кг + 2 кг.

Петя: он много раз менял свою точку зрения, и итог я так и не запомнил. Помню, что когда речь зашла про двое весов, он назвал 1 кг + 2 кг: на тех весах, где одна нога, 1 кг, а на тех весах, где осталось две ноги, 2 кг.

У Жени в п. (а) я спросил: «А один килограмм, значит, висит в воздухе?» У Димы в п. (б) спросил: «Значит, раньше она весила два килограмма, а теперь четыре?» Оба ответили утвердительно. (Однако через пару дней Дима подошел ко мне на кухне и сказал, что он придумал другое решение задачи про курицу — и назвал Женино решение: (а) 1 кг; (б) 1 кг + 1 кг.)

В заключение задачи я произнес следующее нравоучение: «Когда в позапрошлый раз мы с вами решали задачу про дорожки из палочек, один из вас решил эту задачу верно, а двое остальных неверно...» Тут Дима меня перебил: «А я думаю, что я верно решил». Я продолжал: «Конечно, каждый из вас думает, что именно он решил задачу верно. Ведь если бы ты, Дима, думал, что твое решение неверно, зачем бы ты стал нам его говорить? Ты бы постарался придумать другое, верное решение. Так что каждый из вас думает, что он прав. Но, с другой стороны, ведь вы дали три разных решения, и они не могут быть все три правильными. Так во́т, правильно решил задачу только один; но кто это был, я не скажу! Потому что мне важно не то, чтобы вы знали правильный ответ, а чтобы вы учились сами думать. Вот так же и сегодня: один из вас правильно ответил на первый вопрос, а один правильно ответил на второй вопрос. Но кто на какой — не скажу».

Ребята для порядка немного поныли и поклянчили, чтобы я всё-таки сказал, но не очень настойчиво.

Задание 2. Отчества (продолжение).

Эта задача заимствована из лингвистических олимпиад. На листе бумаги нарисовано генеалогическое древо (рис. 4.48).

Сначала шли устные вопросы. Где отец вот этого человека? Где дедушка вот этого человека? Кем приходится вот этот человек вот этому? (Прадедушкой.) Сколько сыновей у этого человека? Сколько внуков у этого человека? Покажите, у кого нет детей (точнее, сыновей)? Дальше я еще объяснил, что такое дядя и племянник, и задал несколько вопросов на эту тему.

Затем было выдано 12 карточек. На них были написаны следующие имена и отчества:

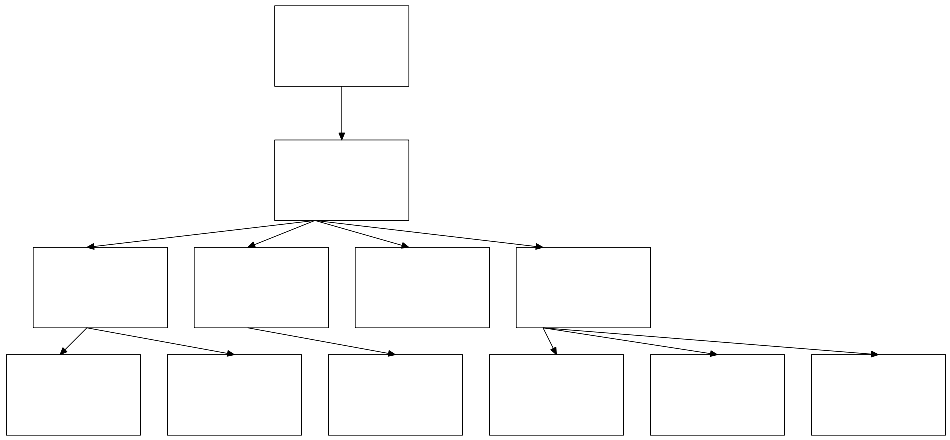


Рис. 4.48. Генеалогическое древо.

ИВАН СЕРГЕЕВИЧ
ПЁТР ИВАНОВИЧ
АЛЕКСАНДР ПЕТРОВИЧ
СТЕПАН ПЕТРОВИЧ
ВИКТОР ПЕТРОВИЧ
БОРИС ПЕТРОВИЧ
ЕВГЕНИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ
ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ
НИКОЛАЙ СТЕПАНОВИЧ
ОЛЕГ БОРИСОВИЧ
ГЕННАДИЙ БОРИСОВИЧ
ВАСИЛИЙ БОРИСОВИЧ

После многочисленных проб и ошибок все они были расставлены по соответствующим клеткам. Моя помощь требовалась несколько раз для активизации поиска, так как ребята, попав в тупик, лениво и равнодушно отступали. Дима по-прежнему путался с отчествами: его внимание всё время сбивалось вторым словом (отчеством) самого человека: в паре Степан Петрович $\to$ Николай Степанович трудно сопоставить первое слово с четвертым, так как средние два слова отвлекают внимание. Фактически с задачей справился один Петя.

Дальше снова последовали устные вопросы того же сорта, что и раньше, но на этот раз с указанием конкретного имени, например: сколько племянников у Александра Петровича? Как зовут дедушку Геннадия Борисовича?

Лучше других снова отвечал Петя: он хорошо читает и поэтому быстрее Димы и Жени находил нужные имена.

Задание 3. Простые числа (продолжение задачи № 49-2).

На этот раз разобрали числа $21, 22, 23, 24, 25$.

Занятие 54. Конец учебного года

1 мая 1982 (суббота) $11^{00} - 12^{00}$ (1 час)

(Дима, Петя, Женя)

Занятие состоялось 1 мая, а записываю я его только 18 октября: до сих пор всё не находилось времени. Естественно, многие подробности из памяти стерлись, так что конспект во многом схематичен.

С самого начала я заявил, что это занятие будет последним в этом учебном году, на что Дима откликнулся, закричав: «А-а, опять дипломы давать будут!»

Задание 1. Фокусы с задуманными числами.

Это очень эффектная игра, которая производит впечатление даже на взрослых, если они не очень сильны в математике. Общая схема ее такова: «Задумай число; прибавь к нему два; отними задуманное число; у тебя получилось два». Разумеется, задание можно варьировать до бесконечности: «Задумай число; прибавь два; прибавь еще раз задуманное число; подели на два; отними задуманное; у тебя получилось один». Правда, необходимо, чтобы участники хорошо умели считать, а в нашем случае это было не совсем так, и из-за этого фокус иногда не удавался. Только Дима всё досчитал правильно. Женя совсем сбился и просто сказал: «Не знаю». Тогда я ему дал самый простой вариант, процитированный выше. С ним он справился, а Дима догадался до принципа фокуса и сказал: «А-а, понимаю, почему получится два. . . », — и далее всё объяснил.

Задание 2. Сделай слово сильнее.

Эта лингвистическая игра в точности совпадает с одной из функций (или трансформаций?), которые используются школой Мельчука—Гладкого—Апресяна для формализованного описания семантики — а именно, с функцией *Magn*. Дается слово, а к нему требуется придумать слово с тем же смыслом, но усиленным. Например, преподаватель говорит *дождь*, а ученик отвечает: *ливень* («дождь стал сильнее»). Вот слова, которые я использовал:

ветер $\to$ ураган	холод $\to$ мороз
тепло $\to$ жара	молоток $\to$ молот (кувалда)
комната $\to$ зал	смех $\to$ хохот
улица $\to$ проспект	страх $\to$ ужас
спортсмен $\to$ чемпион	сладкий $\to$ приторный
умный $\to$ мудрец	большой $\to$ огромный

Вообще мне кажется, что такого рода семантические игры, в которых выявляются *сигнификаты*, т. е. отношения между словами, а не *денотаты* — отношения слов к предметам (если я только правильно понимаю, что такое сигнификат) — такие игры кажутся мне очень полезными и очень важными для развития культуры мышления вообще. К сожалению, я пока не придумал на эту тему ничего интересного, кроме тривиального переворачивания той же игры: *сделай слово слабее*: мокрый $\to$ сырой (влажный), улица $\to$ переулок, смех $\to$ усмешка (улыбка) и т. п.

Задание 3. Простые числа — окончание.

На этот раз мы завершили таблицу с простыми и составными числами, рассмотрев оставшиеся три числа: $26, 27, 28$. После этого в самой правой колонке таблицы мы «подвели итоги», т. е. у каждого простого числа поставили букву П, у каждого «квадратного числа» нарисовали квадратик (для нас это имело не формальный, а совершенно образный смысл — ведь мы и складывали из наших кубиков квадраты), у каждого «кубического числа» нарисовали кубик.

Задание 4. Пятерка.

Теперь каждый получил по листу бумаги, разграфленному прямыми линиями на клетки разных форм и размеров. В каждой клетке стояло число. Требовалось закрасить фломастером те клетки, в которых стоят простые числа. При закрашивании разрешалось обращаться за справками к составленной нами таблице. «А, знаю, — сказал Дима, — пятерка получится».

И в самом деле, после закрашивания нужных клеток на листе образовалась большая красивая пятерка.

5. Заключение: дипломы.

Я объявил, что каждый получает за год пятерку, а также диплом об окончании второго года и подарок. Подарок был у всех одинаковый — игра в 15. Текст диплома гласил:

ДИПЛОМ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА

Этот диплом дан Диме Звонкину за то, что он два года занимался математикой и стал еще умнее, чем в прошлом году.

(Что мы будем писать на будущий год?) В качестве рисунка изображена клетчатая комната, «робот» и алгоритм на нашем языке, а также игральная кость и божья коровка.

На этом занятие закончилось. Боря[13] нас фотографировал.

[13]Женин папа.