Глава 8.

В школе и дома

Наш кружок собирался еще несколько раз, но записей об этом почти не осталось. Ниже я вскользь упоминаю о нескольких задачах, которые показались мне достаточно интересными. Однако с Димой мы продолжали заниматься — без всякого ритма и системы, часто урывками, но на небольшую тетрадочку набралось.

Во втором разделе этой главы — несколько разрозненных историй и наблюдений, касающихся первых классов в двух разных школах.

Беседы о математике, перемежающиеся грустными рассуждениями о школе

3 октября 1983 года. После первого месяца в школе.

[Записано после 68-го занятия (стр. 235) — когда мы решали задачу о мальчике, которому в будущем году исполнится 13 лет.]

Мне почему-то до самого последнего времени казалось, что на Диму школа не подействует так, как она действует на других ребят (страшно применять к нему слово «отупляюще», поэтому скажем так: «негативно»). Однако в последнее время я начинаю замечать у него некоторые сбои.

Так, недавно, он у меня спросил: «Папа, а 4 недели — это сколько дней? Нужно к 228 четыре раза прибавить по 7 или четыре раза отнять?» Я так и не смог у него добиться, откуда он взял число 228.

В другой раз мы вместе шли из школы и вычисляли, может ли один учитель вести уроки физкультуры во всей школе. Он очень плохо понимал, что и зачем надо делать, не мог сосчитать количество уроков в неделе, не знал потом, следует делить на 2 или умножать (2 урока в неделю в классе) и т. п.

Вот и сегодня он тоже был не на высоте. И не в том дело, что он соображал медленнее, чем раньше, а в том, что его поток гипотез был менее интенсивен, чем обычно, и они были менее разнообразны.

Характерен в этом отношении рассказ Гали З. о своем сыне. В их учебнике (кажется, второго класса) есть так называемые «задачи нестандартного содержания». В течение года ни одну из этих задач Лёва решить не мог. Однако началось лето, и через две недели каникул он легко решил все задачи до единой: что-то его «отпустило».

Ноябрь 1983. Школа наводит ужас.

[Записано в те дни, когда Дима сложил все нечетные числа сначала от 1 до 99, а потом от 1 до 999.]

Так случилось, что в день занятия кружка (17 ноября) Дима поздно вернулся из школы, а погода была очень хорошая, и я после обеда выпустил его погулять. Поэтому уроки он стал делать после кружка, и контраст между его успехами на кружке и в школе оказался особенно ярким. Дело в том, что оценки первоклассникам начинают ставить только со второй четверти, т. е. с 10 ноября. За прошедшую неделю Дима получил четыре оценки по математике. Вот они в порядке поступления: 3−, 2, 3, 2. Как раз в четверг, 17-го, Дима получил свою тетрадь домой: мы как родители двоечника должны были расписаться возле каждой оценки, чтобы показать, что мы с его успехами ознакомлены.

В чём же дело? Я внимательно просмотрел его тетрадь. Исписано около трети. Прежде всего хочется отметить, что в ней нет ни одной — подчеркиваю, ни одной — арифметической ошибки. Я был даже удивлен: я привык, что в счете он нередко ошибается. Наивысшая оценка — тройка — стоит за решение «примеров», т. е. за чистые вычисления типа: $9 - 4 - 3 = 2$. Здесь претензии только к почерку. Написал бы красиво — вполне мог бы получить 5. Остальные оценки — за задачи, и с ними дело хуже. Конечно же, все задачи решены правильно — этот факт я выношу за скобки (и, видимо, учительница его выносит за скобки тоже). Однако *запись* — вот в чём корень зла! Есть, конечно, замечания и по почерку, но не они главное. Замечания другого рода таковы (я смешиваю в одну кучу «ошибки» из разных задач): слово «задача» написано с маленькой буквы; после него не стоит точка; слово «ответ» тоже с маленькой буквы; в другом месте вместо «ответ» написано сокращенно «от.» После слова «ответ» следует ставить двоеточие; сначала Дима этого не заметил, потом после моего вопроса, заданного дома, специально в школе посмотрел; оказалось, двоеточие таки нужно. Но на следующий раз он поставил его не там — написал «Ответ 6 : р.». (Какой смысл для него в этом знаке?) Тонким моментом является также употребление именованных величин (а они у них сейчас таковы во всех задачах). Допустим, нужно сложить 3 и 4 коровы. Тогда в так называемой ***краткой записи условия задачи*** нужно написать соответственно 3 к. и 4 к., например:

$$\left.\begin{array}{lcl}\text{На лугу} & - & 3\,\text{к.}\\ \text{На поле} & - & 4\,\text{к.}\end{array}\right]\ ?$$

Затем, в момент выполнения действия, размерность исчезает: $3 + 4 = \ldots$ Когда же получается результат, то размерность появляется снова — но на этот раз обязательно в скобках: $\ldots = 7$ (к.). (В принципе — вполне разумно, иначе слева стояли бы безразмерные величины, а справа — уже коровы. Но что понимают в этом первоклашки?) Наконец, в ответе это самое «к.» пишется опять без скобок. Дима поначалу не разобрался в этой системе и иногда писал лишние скобки где не надо, а иногда забывал поставить размерность вообще. Трудности вызывает также место для вопросительного знака. Если в задаче спрашивается, сколько штук чего-то у кого-то, то и знак вопроса ставится в той же строчке, например:

На поле — ? — на 1 к. больше.

Если же требуется узнать суммарное количество, то к обеим строчкам ставится квадратная скобка, и знак вопроса после нее — как в примере выше. В этом случае, кстати, сразу ясно, что задача — на сложение. Однако Дима этой условности тоже не уловил. Он не приписывал квадратной скобке никакого определенного смысла, или понимал ее интуитивно как то, что «требуется что-то узнать». В результате он иногда навешивал эту скобку и на задачи на вычитание (это уже было не в школьной тетради, а в наших тренировках).

Одним словом, как читатель уже догадался, мы приступили к тренировкам. Алла задала Диме такую задачу: «У Светы было 8 ромашек; 3 она подарила другой девочке; сколько ромашек у нее осталось?» (Это после наших-то прогрессий!) Требовалось, конечно, не решить эту задачу, а правильно записать условие и решение.

Сначала всё шло гладко: слово «Задача» он написал с большой буквы, и точку не забыл. Дальше возник спор; я считал, что следует писать: «У Светы — 8 р.», а Дима утверждал, что они всегда в таких случаях пишут «Света — 8 р.» Вопрос отнюдь не праздный — ведь и за гораздо меньшие отклонения от формы оценка снижается. Мне это показалось странным, но, в самом деле, предыдущие задачи были записаны именно так. Я отступил, хотя и не был твердо уверен в его правоте. Написав первую строчку, Дима надолго задумался, и тут я *впервые в жизни* услыхал от него то, что, думал, не услышу вообще никогда: «*Мы таких задач еще не решали*». — Что такое?!! Оказывается, непонятно, как записать вторую строчку условия. Если написать:

Света — ? — на 3 р. меньше.

то это вроде бы противоречит первой строчке. «Нужно обязательно, чтобы *у кого-то другого* было меньше», — объяснил нам Дима. Внутренне схватившись кто за голову, кто за сердце, мы с Аллой стали менять условие: «... а у Гали на 3 ромашки меньше». Это, однако, не ликвидировало всех вопросов. Нужно ли писать тире *после* вопросительного знака или только перед ним? Следует ли писать «На 3 р. меньше.» с большой буквы? Я чувствовал себя совершенно беспомощным. А ведь одновременно нужно писать красиво, аккуратно, *письменными буквами* — в точности такими, каким их учат, но на бумаге в клетку, а не в линейку. Можно лишь удивляться, что за всеми этими проблемами Дима всё же сумел правильно вычесть 3 из 8. Между прочим, считать их учат тоже не лишь бы как. «Вот, например, нужно сложить 7 и 3, — рассказывает Дима. — Но если ты сложишь $7 + 3$, это будет неправильно. Нужно складывать так: $7 + 2 + 1$. (Я в этот момент ему не поверил, стал спорить, но дальнейшие примеры убедили меня в том, что он говорил правду.) А если нужно сложить 6 и 4, то нужно складывать $6 + 2 + 2$. Вот, например, Ольга Ильинична спрашивает: «Сколько получилось?» — 10. — «А как ты считал?» — $6 + 4$. — «Садись, неправильно. А ты как считал?» — $6 + 1 + 1 + 1 + 1$. — «Садись, неправильно! А ты?» — $6 + 2 + 2$. — «Правильно!». — «Ну, а ты как считаешь?» — спросила Алла. — «Ну, я вообще-то считаю $6+4$, но когда у меня спрашивают, отвечаю, что считал $6 + 2 + 2$», — сказал Дима и сам засмеялся от того, какой он хитрец.

Видимо, методика обучения счету состоит в том, чтобы идти по натуральному ряду с шагом 1 или 2. Возможно, для тех детей, которые еще совсем не умеют считать, это и имеет какой-то смысл. Но это тупое чудовище (я имею в виду школу — учителя́ в этом не виноваты) заставляет всех повиноваться своим примитивным принципам. И некуда деться!

30 декабря 1983 года. Умножение столбиком.

Научил Диму умножать и складывать столбиком. Подсчитали количество секунд в году (точнее, в 365 сутках). Теперь он каждый день сам придумывает себе задачи на умножение и решает их. Много ошибок.

2 января 1984 года. Двоичная система счисления.

По дороге в кино и обратно освоили двоичную систему счисления. Предложение исходило от Димы: система майя не понравилась ему тем, что добавление «глаза» увеличивает число сразу в 20 раз (слишком много). Было бы проще, если бы добавление нуля увеличивало число, скажем, в 2 раза. Однако он не догадался сам, что для такой системы требуются всего две цифры: для этого потребовались наводящие вопросы.

Потом всю дорогу представляли все числа в двоичной системе, а также подмечали разные закономерности (например, какие числа записываются одними единицами).

Вечером он толковал Алле, что бывает еще троичная, «четыричная» и пятеричная системы и т. д., хотя у нас с ним разговора об этом не было. Про вычислительные машины я ему рассказал.

[Вопросы о *целеполагании* обладают собственной логикой; поэтому так трудно передать другому человеку свою систему ценностей. Вообразите себе некое общество, в котором уважают только людей с большими портфелями — и чем больше портфель, тем больше уважение. Вы хотите убедить членов этого сообщества в том, что их критерий уважения неправилен. Но сначала вам нужно добиться того, чтобы они вообще стали вас слушать, чтобы ваше мнение оказалось для них достаточно авторитетным. А для этого вам скорее всего придется сначала обзавестись большим портфелем.

В роли такого вот сообщества до некоторой степени выступаю я сам. Я колебался: следует ли заниматься очевидно бесполезными вещами? Например, записывать числа по системе майя? Возможно, еще более выходящим за рамки разумного выглядел этот сюжет для читателя. И вот — ответ на мои сомнения найден? «Да, заниматься бесполезным можно и нужно, потому что это... полезно! Ведь именно система майя натолкнула Диму на идею двоичной системы. А уж полезность-то двоичной системы никто отрицать не может». Остается только неясным, хорошую ли я службу сослужил самому себе таким рассуждением или наоборот. Укрепил ли я весомым аргументом идею о том, что в жизни сто́ит заниматься бесполезными вещами, или только расшатал ее еще больше?]

5 февраля 1984 года. Я репетиторствую.

Дима около часа просидел у меня на уроке с десятиклассником. Перед этим заглянул в список ответов. Там стояло: $x < -2$, $x > 0$. Он спросил, как это так может быть, чтобы x было меньше -2 и больше 0. Я объяснил. Тогда он на нескольких примерах уточнил, правильно ли он понял мое объяснение; в том числе спросил про граничные значения -2 и 0.

Сказал: «Значит, из целых чисел только три не годятся?» — «Какие?» — «-2, -1 и 0». — «Правильно. А из дробных?» — «Ну, дробных можно сколько хочешь придумать».

Таким образом, он понял этот материал лучше, чем мой абитуриент Дима П.

11 февраля 1984 года. Площади разных фигур. (На одном из занятий кружка.)

Обсуждали разные разности, касающиеся площадей, например, разбиение единицы площади на более мелкие части. Среди прочего, взвешивали разные вырезанные из бумаги фигуры на аптекарских весах. Потом занялись определением площади прямоугольного треугольника. Я, разумеется, в конце объяснил стандартный способ — достраивание до прямоугольника. Но перед этим мальчики предложили свой собственный метод, несколько вычурный, но тоже дающий правильный результат (рис. 8.1).

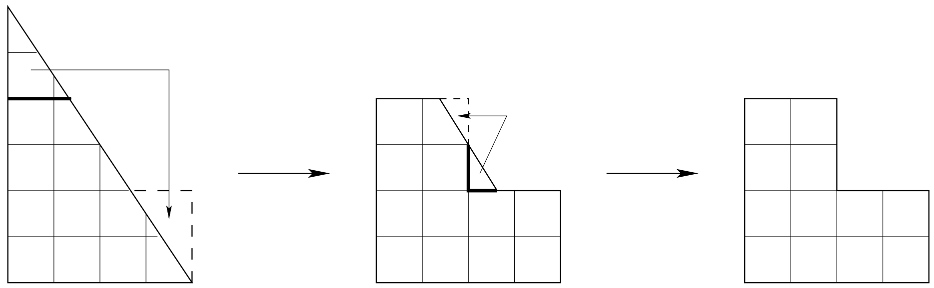

Рис. 8.1. Несколько экзотический, но вполне работающий способ определения площади прямоугольного треугольника.

16 февраля 1984 года. Странно: двоичная система проще дробей?

Вчера и сегодня Дима занимался тем, что перемножал числа в двоичной системе (в столбик), а затем проверял результат в десятичной системе. Занятие это он себе придумал сам. Умножал, скажем, 10 на 100 или 1 000 на 1 000, а потом проверял, получится ли 1 000 или, соответственно, 1 000 000. Существенно то, что он совершенно самостоятельно понял, как при сложении большого числа единиц переносить их сразу в несколько разрядов («$1+1+1+1$ — пишем 0, сюда запоминаем 0, а сюда 1»). Ошибки, однако, допускал, забывая, что в какой разряд запомнил. Я его научил перенесенные знаки записывать снизу.

Сегодня обсуждали связь двоичной системы с восьмеричной и с шестнадцатеричной. Он тоже всё понял. А вот сравнить по величине $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{7}$ никак не может. Слишком формальный стиль мышления: всё время пытается придумать, какие действия надо совершить, а в содержание понятия не вдумывается.

20 февраля 1984 года. Квадрат площадью в 2 клетки. (Снова на кружке.)

На этот раз меня удивил Петя. Я дал такую задачу: построить квадрат площадью ровно в 2 клеточки. Сначала Дима пробовал $(1+\frac{1}{2})^2$ (рис. 8.2 слева) и $(1+\frac{1}{4})^2$ (рис. 8.2 в центре); оба раза правильно подсчитал площадь и понял, что 2 не получается. Я думал — вот я сейчас поражу ребят своим решением! Но тут почти тотчас же Петя взял и нарисовал правильный ответ (рис. 8.2 справа)[1].

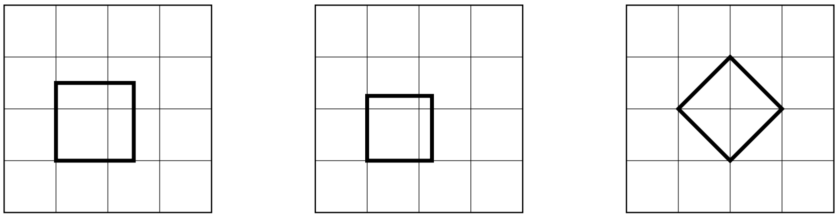

Рис. 8.2. Первая попытка (слева): сторона квадрата равняется $1\frac{1}{2}$, а площадь складывается из одной целой клетки, двух половинок и еще одной четверти, т. е. равна $2\frac{1}{4}$. Вторая попытка (в центре): сторона равна $1\frac{1}{4}$, а площадь получается равной $1+\frac{2}{4}+\frac{1}{16}=1\frac{9}{16}$. (Рассмотрите сами квадрат со стороной $1\frac{1}{3}$.) Наконец, площадь квадрата, показанного справа, равняется в точности двум клеткам: видно, что он состоит из четырех половинок клетки, имеющих форму треугольника.

[1]Задача о площадях «косых квадратов» оказалась необычайно богатой, но более подходящей для детей постарше. В 1989 году в детском компьютерном лагере в Переславле-Залесском мы с группой ребят 10—14 лет прозанимались этой темой две недели. Она сама собой вывела нас сначала на теорему Пифагора, потом на задачу Эйлера о том, когда треугольные числа равны квадратным (нужно, чтобы из одного и того же числа камешков можно было сложить треугольник и квадрат), отсюда к уравнению Пелля (решить в целых числах уравнение $x^2-2y^2=1$) и, наконец, к конкурсу на наибольшую пифагорову тройку чисел (целые числа a, b, c такие, что $a^2+b^2=c^2$). Конкурс выиграл, как ни странно, мальчик Митя 9-ти лет. Позже, по мотивам этих занятий, Митя задал нам вопрос о том, можно ли сложить из одного и того же количества шаров пирамиду и куб. Эта задача сводится к совсем уж серьезной математике, которую даже в университете не проходят — к арифметике эллиптических кривых. После некоторых усилий одному из преподавателей удалось найти ссылку на статью в научном журнале, где доказывалось, что кроме 1 таких чисел нет.

На днях мы с Димой обсуждали иррациональность $\sqrt{2}$. Он задавал очень разумные вопросы: «Значит, число $\sqrt{2}-1$ тоже такое? А $2\sqrt{2}$?» И тому подобное.

◁ Папа мне рассказывал доказательство, но я так и не понял. Во-первых, оно мне показалось слишком длинным, а, во-вторых, я раньше никогда не встречал доказательств от противного. Предположили, что дробь несократимая, потом как-то туманно вывели, что всё-таки сократимая. Вывод из этого почему-то, что такой дроби не существует. — Дима. ▷

Чет-нечет с умножением.

На том же занятии играли в такую игру: выкидывали пальцы и считали произведение; если оно было четным, выигрывал я, а если нечетным, выигрывал мой противник. Естественно, всегда выигрывал я. Дима сразу догадался (а может знал — не помню), Петя догадался очень нескоро, а Женя вообще мало что понимал.

8 марта 1984 года. Деление уголком.

Сегодня научил Диму делить уголком. Пока он усвоил метод не очень твердо. К концу дня выяснилось, что я забыл научить его вычитать (т. е. занимать из старших разрядов в младшие — всё остальное и так ясно). Он придумал свой способ: увеличивал уменьшаемое и вычитаемое на столько, чтобы в младшем разряде цифра у уменьшаемого была больше (например, $50-47=57-54$).

23—25 марта 1984 года. Системы счисления.

Закончилась третья четверть, и Дима получил по математике четверку (вообще у него в этой четверти единственная пятерка — по физкультуре, а остальные — четверки). У его соседа Кости — тоже четверка по математике (единственная; все остальные — пятерки). Дима мне рассказывал, что на последней контрольной Костя у него спрашивал, сколько будет $12-6$. Будучи примерным учеником, Дима не ответил, и Костя, после некоторого размышления, написал: $12-6=8$.

У меня возникла идея новой задачи, и я спросил у Димы, в какой системе счисления будет верно равенство $12-6=8$. Он сразу сказал, что система нужна не менее, чем девятеричная, чтобы была цифра 8. Дальше он долго говорил «не знаю, не знаю...», повторив эти слова множество раз. К сожалению, в последнее время он всегда с этого начинает: сначала долго убеждает себя и всех, что задача у него не получится, а уж потом только ее решает.

После того, как я его пристыдил как следует, задачу он всё-таки решил и назвал двенадцатеричную систему счисления. «Так что, — сказал я, —

наверное, Костя просто решал задачу в двенадцатеричной системе счисления».

Дима потребовал еще несколько таких же задач и решил их. Следующие два дня он придумывал для меня множество аналогичных задач; например: в какой системе верно равенство

$$22 - 7 = 1\text{Д}\,?$$

(В системах счисления с основанием, бóльшим 10, он недостающие цифры обозначал буквами русского алфавита.) Ответ: в системе по основанию 19. Быстрота моих ответов очень удивляла его: сам он решает задачи подбором.

На некотором этапе у нас возник вопрос, почему некоторые равенства верны во всех системах счисления, в которых они имеют смысл (т. е. в которых существуют нужные цифры: например, $32+23 = 55$ в любой системе, начиная с шестеричной), а другие верны только в одной определенной системе счисления. Первоначальная идея была у Димы какой-то совершенно нелепой и не связанной с существом дела. Но потом он всё-таки догадался, что всё зависит от того, происходит ли переход из одного разряда в другой или же действия выполняются независимо в каждом из разрядов.

Когда он всё правильно объяснил, я не удержался и сказал обнадеживающим тоном: «Молодец! Может быть, еще вытянешь на пятерку по математике».

Март, апрель, май.

Все эти месяцы Дима постоянно клянчил у меня микрокалькулятор и что-то на нём считал. По дороге он усвоил и продолжает усваивать много разных понятий. Сначала усвоил, что такое десятичная дробь. Затем узнал операцию возведения в (целую) степень. Узнал число π и что оно означает. Затем по его просьбе я ему рассказал, что такое градусное и радианное измерение углов. Потом объяснил, что такое синус. «А где обратный синус?» — спросил он таким само собой разумеющимся тоном, как будто идея обратной функции уже давным-давно ему известна.

Представление числа в виде пары (мантисса, порядок) пока ему не дается.

Иногда он решал и содержательно осмысленные задачи, например, «сколько секунд в году?» или «сколько дней я прожил?», но это бывало редко. Очень много он занимался задачей о «числах-градинах»[2] (см. журнал

[2]Эта задача впоследствии стала очень знаменитой и получила множество разнообразных названий (например, «сиракузская задача»). По сей день она так и остается нерешенной.

«В мире науки», № 3, 1984). Речь идет о последовательности u_n, заданной рекуррентным соотношением:

$$u_{n+1} = \begin{cases} u_n/2, & \text{если } u_n \text{ четно,} \\ 3u_n + 1, & \text{если } u_n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Если начать с числа $u_0 = 1$, мы попадем в цикл $1 \to 4 \to 2 \to 1$. Поэтому естественно ввести такое правило: попав в 1, останавливаемся. Посмотрим, например, что будет, если мы начнем с числа 7:

$$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1.$$

Если начать с числа 27, то придется сделать уже более сотни шагов; наша последовательность попадает в далекие тысячи, но потом всё равно возвращается обратно и приходит в число 1. Нерешенная проблема как раз в том и состоит, чтобы выяснить, *попадем ли мы в 1, начиная с любого числа.* Вот этот факт Дима и проверял для разных начальных значений.[3]

В остальном его занятия носили довольно бессмысленный характер. Например, десятки раз он проделывал одно и то же вычисление степеней двойки.

На прогулках, когда он приставал ко мне, чтобы я дал ему какую-нибудь задачку, я в основном давал ему задачи про дроби. Сначала дело шло очень туго, или, правильнее сказать, совсем не шло. Потом он что-то начал соображать и постепенно дошел до такого уровня, что стал почти всегда давать правильные ответы на задачи такого типа как $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{6}$, $\frac{3}{5} + \frac{4}{7}$ и т. п.

Однако, какие он при этом производит действия, я не знаю, а объяснений его не понимаю. Такое впечатление, что он каждый раз поступает по-разному и общей идеи приведения к общему знаменателю пока не понял (т. е. не придумал).

$\triangleleft$ Если я правильно помню, то я фактически искал общий знаменатель. А именно: я брал $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ от любого числа, от которого это легко — например, от 6 или 12, вычитал одно из другого, и снова делил на это число. Почему получится всегда одно и то же, я не знал, но знал по опыту, что всегда получается правильно (т. е. папа говорит, что правильно). Число это я просто подбирал, но старался, чтобы оно было поменьше. Поэтому чаще всего оно было действительно наименьшим общим знаменателем. — Дима. $\triangleright$

После одной из просьб дать ему задачку я сунул ему книгу Труднева и сказал, чтобы он сам себе искал задачки. Несколько дней он решал подряд задачи из этой книги, потом ему всё же надоело. Видимо, важна не только и даже не столько математика, сколько «математическое общение».

---

[3] С помощью компьютера проверено, что эта гипотеза верна по крайней мере до $2,7 \times 10^{16}$.

И еще во время болезни он попросил показать ему учебник математики 2-го класса. Я принес, а также 3-го и 4-го. Но он их просмотрел довольно лениво, нигде не вдумываясь в содержание.

Вообще у меня такое впечатление, что если бы я с ним занимался, как в школе, каждый день по одному уроку, то мы могли бы за следующий год пройти программу класса примерно до 8-го. Но я, естественно, этого делать не буду. Мне кажется, что такие занятия допустимы только лет с 11—12, не раньше.

[Здесь надо бы дать небольшое пояснение, что я имею в виду, говоря о *таких* занятиях. Я имею в виду не их систематичность, а их «инструктивный» характер. Как если бы я, например, сам рассказал ему, что такое общий знаменатель и как складывать и вычитать дроби. Это заняло бы не более получаса, и он бы уже давно всё умел. Но вместо этого я пытаюсь добиться от него, чтобы он сам всё это придумал, и в результате дело растянулось уже почти на год. Мне кажется, что инструктивное обучение вполне допустимо (и даже необходимо — иначе далеко не продвинешься), но только с определенного возраста — когда сформируется то, что Пиаже называет «формально-операциональными структурами».]

10 июня 84 года. Четверка за год.

Сегодня получили Димин табель успеваемости. По математике у него за год всё же четверка. Это единственная из его оценок, которая кажется мне несправедливой. Самое обидное то, что учительница даже не подозревает, как далеко он ушел вперед по сравнению со школьными требованиями. Откуда ей это знать?

17 июня 84 года. Вступительная задача на физфак.

Сегодня Дима решил вступительную задачу из письменного экзамена на физфак МГУ за 1983 год (вариант № 1, задача № 4 — т. е. из разряда задач «средней трудности»[4], промежуточных между легкими и трудными). Вот формулировка задачи:

> Если некоторое двузначное число поделить на сумму его цифр, то в частном получится 7 и в остатке 6. Если то же число поделить на произведение его цифр, то в частном получится 3 и в остатке 11. Найти это двузначное число.

[4]Обычно в письменных вступительных вариантах давали пять задач: три легких, четвертую потруднее и пятую — трудную.

Произошло это вот как. Мой абитуриент Андрей П., которому я даю уроки, решить эту задачу не смог. На уроке в течение получаса я с огромным трудом втолковывал ему решение. Видимо, только мое раздражение его тупостью натолкнуло меня на мысль дать эту задачу Диме. Чтобы избежать зазнайства с Диминой стороны, я не стал совать ему книжку со вступительными вариантами, а выписал задачу на отдельном листке. Первое, что он сказал, выслушав условие: «Значит, делили не менее, чем на 12, да?» (То есть то, что было главным камнем преткновения для моего абитуриента, было ему понятно само собой.) Затем задумался. Должен сказать, что обстановка в доме не способствовала сосредоточенности. Сначала мы ужинали, потом он сидел на диване и думал, а к нему приставала Женя, потом Алла заставила его позаниматься английским, потом он снова отгонял Женю и т. п. Расскажу, как я сам решал задачу и как рассказывал ее абитуриенту. Из первого условия получаем, что наше число имеет вид $7k+6$, причем $k \geq 7$ (иначе остаток от деления на k не может равняться шести). Перебираем все такие двузначные числа: $55, 62, 69, 76, 83, 90, 97$. Для этих чисел проверяем второе условие: оно выполняется только для числа 83. Ответ: 83.

Я привел здесь свое собственное решение потому, что в нём содержится одна тонкая ошибка. Меня совершенно потрясло то, что Дима этой ошибки не допустил (так я и узнал о своей ошибке — из его решения!). На самом деле искомое число должно не просто иметь вид $7k + 6$, но еще k должно совпасть с суммой его цифр. Я этого совпадения не проверял. В действительности первому условию удовлетворяют не все те числа, что выписаны выше, а только два из них: 62 и 83.

Через какое-то время после ужина Дима сказал: «К первому предложению я ответ нашел, но он не подходит ко второму предложению». — «А какое число?» — «62. Но если его поделить на 12, то получается не 3 и в остатке 11, а 5 и в остатке 2». — «А как ты нашел это число?» — «Умножил 7 на 8 и прибавил 6». (Опять то, чего я никак не мог объяснить абитуриенту.) «А почему сразу на 8, а не на 7?» — «На 7 я тоже умножал, тогда получается 55. Но у него сумма цифр не 7, а 10». Гм-м... Да, в самом деле; действительно... Хм-м...

Фраза Димы о том, что он уже «нашел ответ» к первому условию, показывает, что он, как всегда, не заботится о том, чтобы найти *все* решения задачи (либо доказать единственность), а удовлетворяется первым найденным решением, считая его ответом. Поэтому в этот момент я придал ему некоторый толчок, без которого он, может быть, сам бы задачу до конца и не решил, застряв на числе 62. (А может и решил бы.) Я сказал только одну фразу: «Ты на правильном пути». Но до него вполне дошел смысл сказанного: ты *на пути*, т. е. нужно проверять дальше.

Через некоторое время он прибежал ко мне и сказал, что получилось еще 83, но только при делении получается 3 (это правильно), а в остатке 5. Я сказал: «Проверь деление еще раз». Он проверил: «Да, правильно, одиннадцать».

◁ Прибежал я только для того, чтобы папа мне сказал, действительно 83 не подходит, или нужно поделить еще раз. Просто так делить мне было лень. А когда папа сказал проверить, я понял, что должно получиться, и проверял довольно халтурно. — Дима. ▷

После этого я объяснил ему, что для полного решения нужно довести проверку до конца, чтобы узнать, нет ли еще решений. Мы вместе проверили $k = 12$ и 13. «А дальше?» — спросил я. «А дальше уже не будут двузначные».

Вот, собственно, и вся история. Остается только добавить, что задача была решена *устно*, и что заняло это примерно 40 минут (это «время брутто», т. е. вместе с отвлекающими делами, а чистое время оценить трудно). После этого мы с Аллой долго решали вопрос, должны ли мы уже считать его гением, или всё же пока для такого вывода данных недостаточно.

Сентябрь 1984.

Летом математикой не занимались. В начале учебного года (это, значит, уже второй класс) Дима получил от меня несколько разных задачек.

(1) Эту задачу я уже упоминал ранее: я ее тогда давал в упрощенном варианте.

> Полторы курицы сносят полтора яйца за полтора дня. Сколько яиц снесут 9 кур за 9 дней?

Сначала Дима, конечно же, сказал: «Девять». Затем, подумав с минуту, дал ответ 18. Решение при этом было таким: 9 кур в 6 раз больше, чем полторы, а 9 дней в 6 раз больше, чем полтора дня. Значит, они снесут в 12 раз больше яиц. Умножаем $1,5$ на 12 — получается 18. Я велел ему еще подумать. Тогда он догадался что $1,5$ яйца следует умножать не на $6 + 6$, а на $6 \cdot 6$, и дал правильный ответ: 54.

(2) Я рискнул дать ему известную «рефлексивную» задачу:

> Встретились два математика, которые давно не виделись, и один сообщил другому, что у него трое сыновей. «Сколько же им лет?» — спросил второй. — «Определи это сам: произведение их возрастов равно 36». Второй математик отвечает: «Данных

> недостаточно». — «Ну хорошо, тогда я добавлю, что сумма их возрастов равна числу скамеек в этом сквере». Второй (посчитав скамейки и немного подумав): «Данных по-прежнему недостаточно». — «Тогда я добавлю, что мой старший сын — рыжий», — сказал первый математик. — «А-а, ну вот это другое дело, — ответил второй. — Твоим сыновьям ...», — и он правильно назвал возраст всех трех сыновей. Определить, сколько лет было сыновьям.[5]

К сожалению, у Димы не появилось даже и проблеска идеи решения.

(3) Немного мы позанимались и дробями. Три-четыре задачи он решил правильно, но каждый раз новым искусственным приемом. Застрял он на вычислении разности $\frac{1}{7} - \frac{1}{9}$ и с этой задачей так и не справился. Однако здесь впервые появились намеки на верный путь: он пытался представить $\frac{1}{7}$ как $\frac{2}{14}$ или $\frac{3}{21}$, а $\frac{1}{9}$ как $\frac{3}{27}$.

$\triangleleft$ Намеки, как я уже говорил, появились раньше, просто число $7 \cdot 9 = 63$ слишком большое, и я не смог его подобрать. — Дима. $\triangleright$

В школе его отметки по математике колеблются в диапазоне от двойки до четверки. Учительница (уже новая — не Ольга Ильинична, а Марина Николаевна) сказала на родительском собрании: «Каллиграфия у нас теперь ставится во главу угла». Это было сказано в процессе обсуждения именно математики. Правда, каллиграфия понималась в широком смысле: где сколько клеточек отступать, где ставить точку, а где нет, писать ли «Задача 32» или «Задача № 32», и еще бесчисленное количество подобной премудрости. Кажется, официально это называется «единый орфографический режим».

С сожалением должен отметить, однако, что Дима стал делать очень много арифметических ошибок. Причин, по-видимому, сразу несколько: однообразие задач, аденоиды, температура, общая затурканность...

25 октября 1984 года. Попытка заниматься более систематично.

По просьбе Димы (да и сам) решил заниматься с ним раз в неделю. Сегодня — первое занятие.

---

[5] **Решение.** Нужно разложить число 36 на три сомножителя всеми возможными способами: $1 \cdot 1 \cdot 36$, $1 \cdot 2 \cdot 18$, $1 \cdot 3 \cdot 12$, $1 \cdot 4 \cdot 9$, $1 \cdot 6 \cdot 6$, $2 \cdot 2 \cdot 9$, $2 \cdot 3 \cdot 6$, $3 \cdot 3 \cdot 4$. Потом посчитать суммы этих сомножителей: $1 + 1 + 36 = 38$, $1 + 2 + 18 = 21$ и т. д. Оказывается, все эти суммы — разные, и только сумма 13 появляется два раза: $1 + 6 + 6 = 2 + 2 + 9 = 13$. Поскольку второй математик, посчитав скамейки, сказал, что данных недостаточно, мы делаем вывод, что сумма как раз равна 13 (иначе данных было бы достаточно). Информация, извлеченная из фразы «мой старший сын — рыжий», состоит в том, что *имеется старший сын*. Значит, ответ — $2, 2, 9$ (во втором варианте — $1, 6, 6$ — старшего сына просто нет).

(1) Анализировали ошибку, которую он делал в вычислении суммы $1 + 2 + \ldots + n$. Он придумал два разных решения:

(а) $1 + \ldots + 10 = (1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6) = 5 \cdot 11 = 55$;

(б) $1 + \ldots + 10 = (0 + 10) + (1 + 9) + (2 + 8) + (3 + 7) + (4 + 6) + (5 + 5) = 6 \cdot 10 = 60$.

Он утверждал, что второе решение «неправильное, потому что нельзя начинать с нуля». Ничего более разумного он долго сказать не мог (примерно год), всё кивая на то, что это «из-за нуля». Можно сказать, что это *пережиток непонимания закона сохранения*. Я заставил его выписать все действия аккуратно. Он всё равно долго не видел ошибки, но в конце концов всё-таки ее обнаружил.

(2) Решали разные задачи «с иксами». Он это понимает *очень плохо*. Хорошо бы это дошло до тех, кто заявляет, что первоклассники якобы могут легко оперировать с иксами. Я теперь твердо убежден, что это чушь. В школе, кстати, эти обозначения вводятся как другой *способ записи* задачи или решения. Алгебраическая символика является необычайно эффективным *инструментом решения задач*. Но первоклассники об этом не догадываются. Просто среди необъятного болота правил о том, что и как записывать и как обозначать, появляется еще одно дополнительное правило, лишенное какого бы то ни было содержательного смысла.

Интересно, что когда в задаче имеются два неизвестных, Дима не понимает, что их следует обозначать разными буквами — скажем, x и y. То есть, не просто не понимает, а активно протестует: «Мы этого тоже не знаем, значит это тоже икс».

На дом я ему задал прочитать главу из Перельмана «Занимательная алгебра» — о составлении уравнений. Между прочим, выяснилось, что он разучился умножать и складывать в столбик!

6 ноября 1984 года. Общие знаменатели.

Занятие произошло неожиданно на кухне после ужина. Дима наконец дошел до идеи приведения дробей к общему знаменателю и научился складывать и вычитать дроби. Однако наличие общего знаменателя он воспринимает скорее как счастливую случайность (он находит его подбором). Я задал ему на дом подумать, почему общий знаменатель существует *всегда*.

18 ноября 1984 года. Еще одна вступительная задача.

(1) Почему всегда найдется общий знаменатель, по-прежнему не понимает. Говорит на эту тему всякие глупости.

(2) Разлагали числа 48, 216, 1 001 на простые множители. Дима искренне недоумевал, для чего мы всё это делаем. Про число $1\,001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$

я сказал: «Правда, как интересно получается?» Он недоуменно спросил: «Что интересно?»

(3) Решили несколько задач из книжки Труднева. Он справлялся с ними довольно легко, хотя иногда и ошибался.

(4) Дал ему такую задачу:

> Ученик перемножал два числа, но ошибся и получил в результате число на 5 меньше, чем нужно. Для проверки он поделил результат на один из сомножителей — и получил частное 29 и остаток 7. Какие числа он умножал?

Это слегка усложненная задача из вступительного варианта в МИСИ (инженерно-строительный): в оригинальной задаче было еще одно дополнительное условие, без которого можно обойтись. У Димы никаких идей решения не было; он пытался перебирать разные варианты, но довольно бессмысленно. Я сидел и раздражался: ну чего он такой тупой!

Из олимпиады.

Как-то на днях я задал Диме задачу из районной олимпиады в Новосибирске (для 7—9 классов):

> Нам вдвоем 35 лет. Мне вдвое больше лет, чем было тебе тогда, когда мне было столько лет, сколько тебе сейчас. Сколько нам лет?

На следующий день он ее решил. Характерно однако, что он все такие задачи решает перебором. В этом и причина его неудачи с задачей из МИСИ: там перебор ничему не помогает, а нужны рассуждения (причем очень несложные).

19 ноября 1984 года.

За обедом минут за пять Дима решил задачу про трех рыбаков — как каждый из них выбрасывал одну рыбу и забирал треть оставшихся; получил ответ 25. Потом я сам рассказал ему про «решение Дирака», т. е. про ответ -2.

25 ноября 1984 года. Делимость на три. Сумма ряда.

(1) Дано вот такое число:

$$1010010001000010000001\ldots1\underbrace{0000\ldots0}_{300\ \text{нулей}}.$$

Требуется узнать, делится ли оно на 3. (Ответ: делится, т. к. сумма его цифр равна 300, т. е. делится на 3.)

Сначала Дима задачу не решил. Мы разговаривали, я подсчитывал, сколько в этом числе цифр (45 450), потом мы вместе считали, поместится ли оно в тетрадке. Потом выясняли, во сколько раз 10^{300} больше, чем 10^{27}. После этого Дима от задачи отказался, сказав, что решит потом, а сейчас тоже хочет что-нибудь решать (а не просто сидеть).

Тогда мы решили пару задач из книжки Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки». Потом вошла Алла, и я ей рассказал исходную задачу. Тут вдруг Дима догадался до суммы цифр и решил задачу, а потом и еще одну — о делимости того же числа на 9.

(2) Следующий вопрос: будет ли это число полным квадратом? (Это число *не* является полным квадратом, так как оно делится на 3, но не делится на 9.)

Дима высказал гипотезу, что «почти все круглые числа — квадраты». Стали проверять на машинке — гипотеза провалилась. В итоге всех обсуждений на дом остались две задачи: во-первых, про это гигантское число, и, во-вторых, когда число 10^n будет квадратом.

(3) В качестве очередной задачи из Игнатьева я выбрал знаменитую задачу о мухе (с несколько упрощенными численными данными):

> Между городами A и B — 300 км. Два велосипедиста — назовем их a и b — одновременно выезжают навстречу друг другу со скоростью 50 км/ч. Одновременно с ними из A вылетает муха со скоростью 100 км/ч и летает между ними: встретившись с b, она летит обратно к a, от него снова к b, опять к a и т. д., и так до тех пор, пока велосипедисты не встретятся. Сколько километров пролетит муха?

Как ни странно, Дима решил эту задачу с помощью суммирования бесконечного ряда. Вот как это произошло. Он стал долго и напряженно подсчитывать, сколько километров муха пролетит до первой встречи с b; получил 200 км. Затем стал считать, сколько она пролетит до встречи с a; нашел $66\frac{2}{3}$ км; затем — до второй встречи с b: $22\frac{2}{9}$ км. Тут он сообразил, что ряд получается бесконечным, и закричал: «Ой, папка! Та́к ведь бесконечно будет!» — «Да». — «Значит, задача не решается?» — «Ну почему же? Во-первых, можно придумать другой способ решения, хитрый. А, во-вторых, иногда и бесконечную сумму можно сложить». — «Как это?»

(4) Тут мы отвлеклись от исходной задачи, и я написал Диме такую сумму:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots,$$

объяснив, что количество слагаемых бесконечно. Я спросил: «Как ты думаешь, сколько получится?» И тогда произошло нечто совершенно удивительное. Дима, ни секунды не размышляя, пожал плечами и ответил: «Два...»

Я — после паузы: «Почему?» — «Ну смотри. Сначала до двух не хватает половины. Потом четверти. Потом одной восьмой. И так всё время будет». То есть по существу дал совершенно правильное доказательство (рис. 8.3).

Я с ним согласился, повторил его рассуждения более подробно, потом нарисовал приложенные друг к другу отрезки длин 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ..., и показал то же самое рассуждение на рисунке. Главным образом я пытался сделать вид, что ничего особенного не произошло, хотя сам был несколько взволнован, и у меня даже слегка дергались колени. Так чтó же получается — что и в самом деле гений?

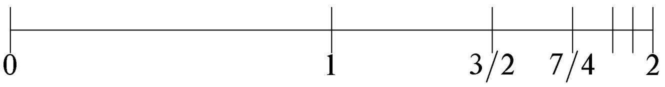

Рис. 8.3. Суммирование бесконечного ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ «Видно», что результат равен 2: после каждого шага расстояние до числа 2 уменьшается вдвое.

Следующий вопрос: «А у нас муха каждый раз во сколько раз меньше пролетала?» Дима задумался и сказал: «В три». (Я тут, видимо, слегка опередил события: Дима сам еще не догадался, что расстояние каждый раз уменьшается в одно и то же количество раз. Но после моего вопроса заметил такую закономерность — разумеется, без доказательства.) Я написал следующий ряд:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots$$

«Сколько теперь получится?» — «Три», — всё так же не задумываясь ответил Дима (видимо, опираясь на чисто формальную аналогию). У меня немного отлегло от сердца. Нет, всё-таки не гений; нормальный способный ребенок. Я засмеялся и сказал, что, мол, как же так — каждое слагаемое меньше, а сумма больше? Дима сначала не понял, о чем я говорю; я объяснил; он ответил: «Ну и что?» — но потом всё же задумался. Стал считать, используя прежний прием, т. е. подсчитывая, сколько не хватает до двух, а я записывал: $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{14}{27}$, ... Вскоре он догадался, что в пределе не хватает половины, и, значит, получится полтора. Я не стал настаивать на доказательстве, хотя отрезки мы всё-таки нарисовали.

◁ На самом деле нужно было проверить, что расстояние до полутора каждый раз уменьшается в три раза. Мне еще долго после этого ответ «полтора» казался непонятным (а только угаданным). — Дима. ▷

(5) Возвращаемся к задаче о мухе. «И, значит, что́ теперь нужно помножить на полтора?» — спросил я. Дима уставился на меня в недоумении: он явно забыл, от какой печки мы с ним танцевали. Потом сказал: «А-а...» — и надолго задумался. После чего, наконец, ответил: «Двести километров. Значит, будет триста километров». — «Значит, какой ответ?» — «Триста километров».

После этого я ему рассказал настоящее решение: велосипедисты ехали до встречи 3 часа; значит, муха летала туда-сюда тоже три часа, причем со скоростью 100 км/ч; получается 100 км/ч · 3 часа = 300 км.

Дима никакого особого восторга не проявил.

◁ Думал-думал, что-то такое придумывал, а оказалось, что всё зря, можно было решить гораздо проще. — Дима. ▷

Я засомневался, понял ли он мое решение, и дал ему модификацию задачи: скорости велосипедистов — 20 и 40 км/ч, а скорость мухи 80 км/ч. Оказалось, что он всё понял, потому что действия производил правильные. Однако времени было уже полдесятого вечера, и он сначала никак не мог поделить 180 на 20 (всё получал 8), а потом не мог умножить 80 на 5 (получал 450). Так что на этом мы занятие кончили, хотя еще полчаса после этого он приставал ко мне с вопросами, почему в школе не учат математике так же, как я. И трогательно, и обидно до слёз. Господи, если бы можно было ограничиться нашим одним занятием в неделю!

26 ноября 1984 года.

Выяснилось, что Дима всё же не понимал, что такое сумма бесконечного ряда, и считал оба своих ответа приближенными.

19 декабря 1984 года.

Сегодня, после большого количества проб, ошибок и путаницы, Дима наконец научился умножать дроби.

26 декабря 1984 года. О ханойской башне.

(1) Где-то на протяжении прошедшей недели Дима научился также и делить дроби.

(2) Жене (нашей) подарили на день рождения новый вариант ханойской башни. Он называется «игра ранжир», и вместо кружочков в ней нужно расставлять фишки с цифрами — не до 5, как в венгерской игрушке, а до 8 — причем нельзя бо́льшую цифру ставить на меньшую. Я бы сказал, что 8 фишек — это чересчур: чтобы решить задачу, нужно сделать 255 ходов.

Дима с Петей, увидев игру, мгновенно догадались, что это модификация ханойской башни.

После этого у Димы вновь обострился интерес к этой игре. Он провел с ней несколько дней и, наконец, пришел ко мне с заявлением, что он знает оптимальный алгоритм. Огромные трудности у него вызвала формулировка алгоритма. Он никак не мог понять, с какого конца начать, какими словами выразить свою мысль, и всё только повторял бессмысленно: «Сначала вот эту — сюда, потом вот эту — сюда, потом вот эту — сюда, вот эту — сюда, вот эту — сюда...» При этом я видел, что сами действия он делает совершенно правильные. Большого труда и терпения стоило получить от него настоящую формулировку. Алгоритм оказался в самом деле оптимальным. Он состоит в следующем:

(а) ходить надо по очереди единичкой (или самой маленькой плашечкой) и не единичкой;

(б) ход не единички каждый раз определяется однозначно, так как ее нельзя ставить на единичку;

(в) единичкой надо всегда ходить в одну сторону и по циклу.

Я обсудил с ним проблему необходимости доказательства, но сейчас о нём нечего даже и помышлять. Хочу заметить, что я сам в свое время не придумал ни алгоритма (я его где-то вычитал), ни доказательства (его после моего вопроса придумал Дима Бугаенко).

Всего в этом семестре занимались 6 раз, не считая разговоров «между делом».

О первоклассниках

Здесь собрано несколько разрозненных заметок о двух первых классах: в течение одного полугодия я вел кружок в Димином классе, и в течение месяца работал преподавателем в «экспериментальном» классе. Если бы я стал вести что-то вроде дневника на эту тему, то как минимум 95% его содержания было бы посвящено вопросам дисциплины. Без наведения порядка в классе, без того, чтобы дети перестали баловаться, драться, петь, бегать и ... (дальше следует длинный список глаголов, который каждый сможет продолжить сам), короче, без создания в классе нормальной рабочей обстановки невозможно сдвинуться ни на шаг. Каким образом добиться этого и оставить в то же самое время возможность для поиска, для творчества — это великая загадка; только настоящие виртуозы на это способны. Я к ним не только не отношусь, но даже и на версту не приближаюсь. Поэтому буду писать только о том, в чём я хоть что-то смыслю.

Откуда берутся способности?

Вот вопрос, который всех интересует! Это я развил Димины способности к математике с помощью кружка, или же, наоборот, он уже родился способным, а кружок протекал так интересно как раз благодаря этому? Я сам склоняюсь ко второму варианту. Роль кружка состояла в том, чтобы он *узнал* о том, что существует математика — активная, веселая, захватывающая. Другой вопрос — как часто встречаются талантливые дети и сколь многие из них так и проходят мимо своего призвания, так никогда и не узнают о том, что могла предложить им жизнь? Вот как раз об этом я и хочу сказать: в *первом попавшемся* классе я встретил мальчика, который был отчетливо способнее Димы (и ведь это при том, что никто с ним специально не занимался). Звали его Глеб. Учился он весьма средне; что делает сейчас, не знаю. Вот несколько наблюдений.

1. Задача про C_5^2 (см. главу 3). Часть ребят вообще не поняла условия; другие нашли всего 3—4 решения; третьи якобы «нашли» 24—26 вариантов, не замечая повторений; один только Глеб нашел ровно 10 решений и твердо заявил, что больше нет. (Правда, в качестве объяснения сказал, что $5 + 5 = 10$.)

2. Фокус, в котором складывались закрытые числа (см. стр. 207), он разгадал тут же на занятии. Его решение тоже, как и Димино, основывалось на периодичности таблицы, а не на дополнении до 20.

3. Еще один фокус, основанный на том, что сумма цифр на противоположных гранях кубика равна 7 (см. стр. 210), он тоже разгадал сразу. Мне надолго запомнился его сосредоточенный взгляд: он изучает кубики, смотрит, что лежит сверху, потом что лежит снизу, лицо озаряется...

Мне кажется характерным также и то, что как-то раз я объявил его «чемпионом», поскольку он быстрее всех что-то вычислил, но он в ответ признался, что его вычисление было ошибочным.

Что такое задача?

После одного из занятий Глеб задал мне такую задачу (рис. 8.4):

> Вот здесь озеро (рисует). С этой стороны живет Баба, а с этой стороны — Дед. Вот здесь растет камыш. Вот здесь лежит огурец. А в озере живет черт, он никого не пускает. А вокруг озера тоже пройти нельзя, там лес. Как Деду проехать к Бабе?

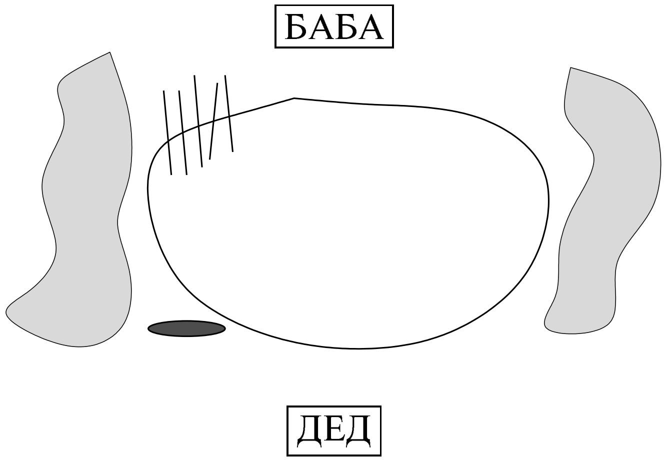

Рис. 8.4. Как Деду проехать к Бабе?

— А лодка у Деда есть?
— Нет.
— А обойти лес вокруг?
— Э-э, нет, так нельзя!
— . . . ?
— Сдаетесь?
— Сдаюсь.

— Ну вот. Этот черт был очень послушный. Дед ему говорит: «Черт, черт, съешь огурец». Он съел. Дед ему говорит: «Черт, черт, накоси камышей». Он накосил. Тогда Дед ему говорит: «Черт, черт, там твои внуки плачут, тебя зовут». Черт нырнул под землю, и в дне озера образовалась дырка, и вся вода из озера туда утекла. И Дед по дну — пух, пух — и перешел к Бабе.

Должны ли мы сделать вывод, что во всех наших «задачах на смекалку» дети видят ровно столько же смысла и логики, сколько в этой? «Задача — это когда сначала что-то рассказывают, а потом задают вопрос, на который непонятно, как отвечать». Никакой связи ответа с условием задачи при этом не предполагается.

Примерный ученик.

На одном из занятий мы решаем задачу про C_5^2, а на следующем — про C_5^3. Потом я объясняю, почему эти задачи эквивалентны друг другу: выбрать и закрасить две клеточки из пяти — это то же самое, что выбрать и оставить незакрашенными три клеточки из пяти. Так что мы могли бы догадаться, что сегодняшняя задача похожа на ту, что была в прошлый раз, и сразу сказать, что у нее будет 10 решений. Один мальчик тянет руку. «Что тебе, Алёша?» — «*Я догадался*, что что эта задача похожа на ту, что была в прошлый раз...» В прошлый раз он на занятии не был.

Пример на вычитание

Мы находимся в экспериментальном первом классе; в нём всего 18 учеников.

Я насыпал в бутылку из-под молока некоторое количество бобов и предлагаю ребятам угадать, сколько их. Весь класс кричит «сто!». Я тогда говорю, что так неинтересно: никто не будет победителем. Давайте, говорю я, каждый назовет свое число, но только чтобы все числа были разными. Мы их запишем на доске, а потом проверим.

Записываем имена и числа на доске. Потом всем классом хором вслух считаем бобы: это не вредно — лишний раз повторить последовательный счет. Бобов оказывается 49. «Ну что, кто победил?», — спрашиваю я. «Никто не победил». Дети имеют в виду, что никто не угадал точного количества. «Ну, хорошо, а кто всё-таки оказался ближе всех к правильному ответу?» — «Таня ближе всех». (Она назвала 52). «А на сколько она ошиблась?» — «Она ошиблась на три боба», — отвечает класс.

Всё хорошо. С этой задачей покончено, и мы переходим к другим делам. Примерно через четверть часа я задаю детям «пример на вычитание»: из 52 вычесть 49. Результат ошеломляющий: с этой задачей не справился ни один человек. Ни один!

Я оставляю читателям полную свободу для интерпретаций.

Потрогать руками

Мы — в том же классе, но теперь — в компьютерном зале. Идет урок информатики. Я уже упоминал ранее язык Лого, специально приспособленный для детей. С помощью совсем простых программ дети могут управлять движением по экрану небольшого робота-черепашки, а могут и писать сочинения и делать много чего еще. Некоторые ученики работают с удовольствием; другие откровенно маются и даже начинают шататься по классу (дисциплина, дисциплина!). Неожиданно один из таких «шатающихся» обнаруживает в шкафу допотопный арифмометр. «А что это?» Объясняю, что это машинка, которая умеет складывать. «Как? Сама складывать?» Тот факт, что компьютер умеет складывать, его почему-то не удивляет, но вот машинка! «А покажите...» Весь класс уже давно сорвался с места и окружил нас со всех сторон. Я ставлю в окошечке 6 и говорю, что сейчас прибавлю 1. Поворачиваю ручку: «трык-трык-трык-трык-трык!», — и в окошке появляется 7. «Уу-ааа!», — реагирует класс; в смысле «вот это да!!!» Теперь уже каждому хочется повернуть ручку, чтобы машинка так вот «здóровски» заурчала — и прибавила единицу. Скучные компьютеры забыты: ведь здесь можно самому ручку крутить! А мне вспоминается цитата, которую я незадолго до того выписал себе в тетрадочку. Учительница Т. Служевская в своей статье «Без шаблона» в журнале «Юность» (№ 1 за 1986 год) рассказывает:

> ... Еще экскурсия, на этот раз в зоопарк с четвертым классом. Мы долго ходим по территории: хищники, обезьянник, крокодилы за стеклом, слон за барьером из колючек... Ребята дружно облепляли решетки, читали надписи — процесс познания шел вовсю! Вдруг пропал один мальчишка. Не успела я испугаться — он вылетает из-за угла запыхавшийся, красный, с горящими глазами: «Скорее! Скорее! Зовите всех! Там такое... такое!!» Что же, думаю, могло его так потрясти после всех питонов и бегемотов? А он кричит: «Там лошадь можно руками потрогать!» И всех ребят как ветром сдуло от слона — лавиной бросились за угол! А там стояла запряженная в телегу гнедая кобылка с провисшим брюхом, на которой развозят корма. И ее и правда можно было погладить, и дать ей с руки травки, которую она вежливо брала мягкими губами...

Ну до чего ж замечательная история! Можно было бы поставить эпиграфом ко всей моей книжке.