Геометрия в школе

Суждения

- **А. Н. Колмогоров** поставил перед собой цель создать школьный курс геометрии, в котором «постепенно подготавливается материал для понимания возможностей «разных “геометрий”, отличных от евклидовой (как геометрия Лобачевского»).
- **В. И. Арнольд** «Нынешние наши академики писать хороших учебников не умеют: даже мой любимый учитель Андрей Николаевич Колмогоров. . . ». «По-моему, школьные учебники надо писать не академикам, а (лучшим) школьным учителям — таким и был Андрей Петрович Киселёв»
- **И. Ф. Шарыгин** «Декарт покрыл геометрию паршой алгебраических формул. . . »
- **Ж. Дьедонне** «Есть царский путь к геометрии — путь Декарта»
- **А. Я. Канель** «Одной из целей изучения математики вообще (и геометрии в частности) служит концепция «МАТЕМАТИЧЕСКОГО ДОКАЗАТЕЛЬСТВА»; человек, не знакомый с этой концепцией культурно неполноценен»

Вопросы

- Что есть истина?
- Какое из двух высказываний истинно:
  1) Сумма углов треугольника равна двум прямым углам
  и 2) ни у одного треугольника сумма углов не равна двум прямым
- Можно ли доказать, что евклидова геометрия непротиворечива?
- Кто из следующих математиков владел концепцией «МАТЕМАТИЧЕСКОГО (или даже ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО) ДОКАЗАТЕЛЬСТВА»: Евклид? Лобачевский? Гильберт?

В конце обсудим ответы на эти вопросы.

Строение Геометрии по Евклиду и Колмогорову

Геометрия Евклида основывается на пяти аксиомах. Вот они:

1. Через любые две точки проходит прямая.

2. Отрезок прямой можно неограниченно продолжать в обе стороны.

3. Из всякого центра всяким раствором может быть описана окружность.

4. Все прямые углы равны между собой.

5. Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние углы, меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.

В геометрии Колмогорова три основных понятия: точка, прямая и расстояние и пять групп аксиом.

1. Аксиомы принадлежности. a) *Каждая прямая есть множество точек.* b) *Для двух отличных друг от друга точек существует единственная содержащая их прямая.* c) *Существует хотя бы одна прямая и каждой прямой принадлежит хотя бы одна точка.*

2. Аксиомы расстояния. *Каждым двум точкам A_1 и A_2 поставлено в соответствие неотрицательное число $d(A_1, A_2)$, называемое расстоянием между A_1 и A_2 так, что удовлетворяются аксиомы расстояния.*

3. Аксиомы порядка. a) *Любая точка O прямой p разбивает множество всех отличных от O точек этой прямой на два непустых множества.* b) *Для любого положительного числа a на заданном луче с началом в точке O существует одна и только одна точка A такая, что $d(A,\ O) = a$.* c) *Если точка C лежит между точками A и B, то точки A, B и C лежат на одной прямой.* d) *Любая прямая p разбивает множество не принадлежащих ей точек из $\mathcal{A}$ на два непустых множества так, что любые две точки, принадлежащие разным множествам, разделены прямой p в том смысле, что отрезок, соединяющий две эти точки пересекается с p, в то время, как никакой отрезок, соединяющий две точки из одного множества с p не пересекается.*

4. Аксиомы подвижности. *Если расстояние между точками A и B положительно и равно расстоянию от A_1 до B_1, то существуют два и только два перемещения (т.е. преобразования плоскости на себя, сохраняющие расстояния), каждое из которых отображает A в A_1 и B в B_1.*

5. Аксиома параллельных. *Через точку плоскости, не лежащую на прямой, можно провести лишь одну прямую, ей параллельную.*

В настоящее время существует множество аксиоматических систем евклидовой геометрии (Гильберта, Вейля, Делоне ...)

Возникают новые вопросы

- Непротиворечива ли геометрия Колмогорова?
- Геометрии Колмогорова и Евклида (а ещё и Гильберта, и Делоне и другие, задаваемые другими аксиомами) одинаковы они или нет?

Ответ на эти вопросы связан с построением *интерпретации* (или, как сейчас чаще говорят — *модели*) геометрии Колмогорова. Колмогоровская геометрия, как было сказано, состоит из точек, прямых и расстояния. Они образуют тройку $(\chi_K, \mathcal{P}_K, d_K)$.

А сейчас мы построим (хорошо известную вам систему (декартову), тоже состоящую из точек, прямых и где существует расстояние. Обозначим такую тройку $(\chi_D,\ \mathcal{P}_D,\ d_D)$, а аксиомы геометрии Колмогорова превратятся в теоремы геометрии Декарта.

Геометрия Декарта состоит из точек ($\chi_D = \mathbb{R}^2 = \{(x_1,\ x_2) \mid x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}\}$) и прямых (множество $\mathcal{P}_D$ состоит из решений уравнений $a_1x_1+a_2x_2+a_3 = 0$, где $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ и тройки $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ и $(\alpha a_1,\ \alpha a_2,\ \alpha a_3)$, $\alpha \neq 0$ определяют один объект — одну прямую), а расстояние определяется формулой $d_D((x_1, x_2), (x_1', x_2') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2}$.

Проверка колмогоровских аксиом групп 1–3 и 5 очень проста: через две точки декартовой плоскости проходит прямая и при том только одна — это лёгкое арифметическое упражнение; в качестве примера прямой можно предложить прямую $x_2 = 0$, в качестве точки на ней — точку $(0,\ 0)$, в качестве точки вне этой прямой — точку $(0,\ 1)$ и т.д. Чуть более сложно доказывается, но и это доступно школьнику, что любое взаимно-однозначное преобразование декартовой плокости, сохраняющее расстояние может быть осуществлено сдвигом, поворотом и отражением относительно прямой, откуда следует аксиома 4. Итак, декартова геометрия является геометрией Колмогорова. Но верно и обратное: по абстрактной колмогоровской геометрии можно построить изоморфную ей декартову геометрию.

Ответы на заданные вопросы

1. Из-за изоморфизма геометрий Колмогорова и Декарта геометрия Колмогорова непротиворечива, *если непротиворечива арифметика.* Колмогоровская аксиоматика — это просто расширенная аксиоматика Евклида, значит, всё что может доказать Евклид, докажет и Колмогоров, но как мы увидим, не наоборот! (евклидовы аксиомы действительно должны быть дополнены). Гильберт, Делоне и другие доказывают изоморфизм своих геометрий с Декартовой, значит, их геометрии совпадают с колмогоровской.

2. Математическая истина есть логическое следствие из некоторого набора утверждений, принимаемых без доказательства. А вы что думаете по этому поводу?

3. Евклид не вполне владел «концепцией математического доказательства», ибо его первая же теорема (о существовании равностороннего треугольника) не вытекает из его аксиом; Лобачевский не доказал непротиворечивости своей геометрии (хотя был очень близок к этому); Гильберт в своей первоначальной аксиоматике кое-чего не учёл, т.е. «концепцией» тогда не вполне владел (потом исправился).

4. Колмогоров фактически построил школьный курс геометрии, в котором «постепенно подготавливается материал для понимания возможностей «разных "геометрий", отличных от евклидовой (как геометрия Лобачевского»). Действительно, если сохранить все аксиомы первых четырёх групп, заменив аксиому о параллельных Евклида на аксиому Лобачевского, то чуть потруднее, но доступно сильному школьнику доказать изоморфизм полученной геометрии с моделью Пуанкаре, а значит, непротиворечивость геометрии Лобачевского, если (опять-таки) непротиворечива сама арифметика. В геометрии Лобачевского ни у одного треугольника сумма углов не равна «двум прямым».

5. Колмогоровский учебник не подходит для единой школы. Но единая школа не подходит для нашего времени. Какая-то часть людей, как мне кажется, должна овладеть «концепцией доказательства». Для таких людей учебник Колмогорова (быть может, чуть усовершенствованный) подходит, а хорошему учителю он не под силу.

6. Шарыгин и Дьедонне оба правы: «Декарт действительно покрыл геометрию паршой алгебраических формул», но не простою паршой, а золотою. Мир преисполнен двойственностью и Евклид и Декарт двойственны друг другу. Я старался продемонстрировать вам, что оба пути золотые.