ISSN 0130—9358

ShkolaPress®

журнальное издательство

Научно-теоретический и методический журнал

МАТЕМАТИКА в школе

2
93

Решение поставленной задачи ученики находят быстро. Пусть $\arcsin x = a$, где $-\frac{\pi}{2} \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2}$. Тогда $\sin a = x$, $\cos a = \sqrt{1-x^2}$, где $|x| < 1$. Значит, $a = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, т. е. $\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ при $|x| < 1$; при $x = 1$ $\arcsin x = \pi/2$; при $x = -1$ $\arcsin x = -\pi/2$, $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.

На основе этого исследования можно составить короткую программу для вычисления $\arcsin x$ и $\arccos x$.

```
10  PRINT «Вычисление arcsin (x) и arccos (x)»
20  PRINT «—1<=x<=1»
30  INPUT «Введите x»; X
40  IF ABS(X)>1 THEN GOTO 20
50  IF X=1 THEN LET R1=PI/2
60  IF X=—1 THEN LET R1=—PI/2
70  IF ABS(X)<1 THEN LET R1=ATN(X/SQR
    (1—X*X))
80  LET R2=PI/2—R1
90  PRINT «arcsin («; X; «)=»; CSNG (R1)
100 PRINT «arccos («; X; «)=»; CSNG (R2)
110 GOTO 30
```

ЭКСПЕРИМЕНТ

Информационно-поисковая система по учебным задачам

И. Ф. Шарыгин, М. А. Бузинвер, Р. К. Гордин, С. И. Трифонов, М. Ф. Карпелевич, А. Я. Белов
(Москва)

В настоящей статье рассматривается информационно-поисковая система по учебным задачам, предназначенная для подбора заданий в режиме диалога пользователя с ЭВМ. Первый этап этой работы — версия 2.10 ИПС «Задачи», раздел «Планиметрия» реализован совместно Московским домом научно-технического творчества молодежи и московской школой № 57 при участии ряда других организаций. Основным спонсором выступил московский фонд «Образование».

В перспективе планируется включение в систему задач и по остальным разделам математики. Предполагается создать аналогичные системы по физике, биологии и другим дисциплинам.

1. Как возникла эта система

Когда компьютеры прочно вошли в нашу жизнь, у многих возникла идея создания базы данных (информационно-поисковой системы) по задачам. При этом подразумевались школьные учебные задачи, либо задачи для студентов, либо задачи для подготовки абитуриентов. Несколько в стороне стояли задачи олимпиад, существенно более трудные для формализации, необходимой в компьютерной системе. Можно сказать, что эта идея витала в воздухе, став особенно популярной в последние годы, с появлением компьютеров в школе.

Первые обсуждения начались в 1988 г., когда казалось, что такая база данных может объединить решение двух проблем. Первая связана с классификацией олимпиадных задач, попыткой понять их место в математике, с одной стороны, и в обучении математике — с другой. Эти задачи, которые часто нельзя отнести к определенному разделу математики, не всегда можно решить применением стандартных приемов. При попытке классификации они высвечивают ряд содержательных вопросов структуры математики.

Вторая проблема — извечная проблема передачи опыта учителей-практиков. Обычно хороший учитель может передать свой опыт разве что близким коллегам, потому что после его уроков остаются только записи в тетрадях.

Ситуация несколько лучше при системе листков с задачами, которые выдаются каждому ученику для длительного самостоятельного решения. Подробное описание этой системы дано, например, в статье Р. К. Гордина (Математика в школе. 1989. № 4). Характерно при этом, что в листки входят и факты, традиционно считающиеся теорией, что делает подборки задач в листках самостоятельными и логически замкнутыми. Так вот при такой системе даже через несколько лет можно найти листки, составленные разными преподавателями на нужную тему. И когда мы, делая свои листки, стали просматривать листки других преподавателей за последние 10 лет (что тоже было не так уж просто, пришлось перерыть многие личные архивы), таких материалов оказалось великое множество. При этом некоторые были совсем не похожи друг на друга, основываясь на абсолютно несовместимых подходах. Некоторые пересеклись наполовину, а некоторые практически совпали. Тогда и возникла мысль, что база данных, в которой задачи бы не повторялись, а просто имели бы разные ссылки, существенно облегчила бы работу. Со временем стало понятно, что такая база решила бы и другие проблемы, в том числе и в тех случаях, когда нет листков.

Итак, можно сказать, что изначально мы преследовали такие цели: собрать вместе из разных личных архивов задачи, а также информацию о том, как их можно использовать; добавить известные задачи из литературы; навести порядок в организации этих задач, позволяющий легко «достать» именно нужную задачу; и наконец, попытаться разобраться в естественной структуре самих задач.

2. Как использовать нашу систему

Мы исходим из того, что важнейшим элементом школьной математики является задача. Не будет большим преувеличением, если сказать, что в конце концов все сводится к решению задач. Задача выступает и целью, и средством обучения, даже процесс изучения теории может быть методически оформлен в виде процесса решения соответствующих, последовательно расположенных задач.

С появлением в арсенале учителя компьютерной информационно-поисковой системы резко возрастают его методические и творческие возможности. Безусловно, в полной мере такая система заработает в перспективе, когда по объему содержащейся в ней информации заменит не только задачник, но и практически все более или менее обозримое множество задачников. При этом не только заменит, но и превзойдет, поскольку, в отличие от задачника, она не привязана к одной системе классификации, не ограничена тематически.

Первая из разрабатываемых версий, хотя и является начальным шагом на этом пути, способна существенно повлиять на работу учителя, причем особенно полезной она будет для творчески работающего учителя, индивидуально и дифференцированно планирующего свои уроки. Прежде всего, уменьшится время, уходящее на подборку задач к уроку, а, самое главное, сильно сократится расход личного времени. Вследствие этого учитель сможет более гибко и дифференцированно подходить к учебному процессу, регулярно обновлять используемый задачный материал, варьировать уровень сложности от класса к классу и внутри класса. Он сможет быть уверен, что в соответствующей подборке задач содержатся все те и именно те задачи по нужной теме, которые наиболее соответствуют поставленным методическим целям, поскольку поиск осуществляется на достаточно большом массиве задач.

3. Структура системы

В нынешнем виде система предназначена для:
— учителей математики средней школы,
— руководителей математических кружков,
— преподавателей специализированных математических классов,
— людей, работающих в других учебных группах.

Главная ее цель — облегчить процесс подготовки преподавателя к занятиям, обеспечив возможность такой подготовки в режиме диалога с системой.

В систему включаются:
— задачи общеобразовательной программы средней школы;
— задачи вступительных экзаменов в МГУ, МФТИ и другие вузы;
— задачи повышенной трудности, задачи математических олимпиад различного уровня, вплоть до международной;
— темы и разделы, выходящие за пределы школьной программы, по которым накоплен достаточный опыт их преподавания школьникам.

Для каждой задачи в системе хранится то, что может войти в обычный задачник, т. е. условие, решение (включая различные варианты), указание, ответ, методические замечания и комментарии. К тому же, это набор разнообразных параметров, позволяющих выделить данную задачу из множества других по характерным ее признакам, например: методам ее решения, используемым в задаче математическим понятиям и объектам, информации о том, где и когда встречалась эта задача, и многому другому.

4. Задачи в системе и их параметры

При описании параметров задач возник ряд вполне содержательных проблем с терминологией. Иногда привычными словами нам приходилось обозначать не столь привычные понятия. Типичным примером является употребление в системе термина «оформительская задача». Под этим мы понимаем класс задач, решение которых относительно просто на интуитивном уровне. Основная трудность в том, чтобы сформулировать его строго. Это, безусловно, достаточно важный класс задач, заслуживающий того, чтобы быть выделенным. К сожалению, для этого не существует стандартного термина, и мы не смогли подобрать более удачного, чем «оформительская». В то же время, как показал наш опыт, само это слово часто вызывает у учителя совсем другие ассоциации. Поэтому, к нашему сожалению, мы и вынуждены обратить внимание пользователя на употребление терминов для описания параметров задач, к которому мы сейчас и переходим.

А. Поля, допускающие только просмотр[1]

1. Условие задачи. В подавляющем большинстве случаев текст условия приводится по источнику без существенных изменений. Однако некоторые обозначения даются в сложившемся ко времени составления системы виде. Например, обозначение отрезка (AB, а не $[AB]$), длины отрезка (AB, а не $|AB|$), угла и величины ($\angle ABC$, а не $\widehat{ABC}$), площади многоугольника ($S(ABCD)$, $S(ABC)$) и т. п. Совсем в немногих случаях изменены численные данные.

2. Решение. Более половины всех задач системы снабжены достаточно подробным решением. В случаях очень похожих вариантов одной и той же задачи приводится решение только одного из них.

Разработчики старались привести наиболее логичное и красивое, с их точки зрения, решение большинства задач. Иногда дается несколько вариантов решения. Естественно, что не всегда найдены действительно наилучшие решения. Разработчики будут благодарны за сообщения о неизвестных им красивых решениях приведенных задач.

Отдельно необходимо заметить, что при поиске задач по путям решения будут проанализированы и не самые оптимальные пути, в том числе не приведенные в поле «решение».

3. Указание к решению. Указание — по существу подсказка. В большинстве так называемых учебных задач здесь указывается «шаг, до которого учащийся мог бы додуматься самостоятельно»[2]. Как правило, указание достаточно коротко — одна фраза. Указание — не всегда главная идея решения задачи. Иногда это лишь направление, в котором следует двигаться, чтобы «натолкнуться» на эту идею.

4. Ответ. В задачах на вычисление это либо число, либо алгоритмическое выражение, зависящее от буквенных данных задачи, либо фраза «задача не имеет решения» (такого треугольника (угла, отрезка и т. п.) не существует), либо неравенство ($AB>CD$; $\angle ABC>\angle MNK$). В задачах на доказательство и на построение это поле, как правило, не заполняется. В задачах на геометрическое место точек, на максимум и минимум — некоторая фраза (серединный перпендикуляр к отрезку AB; окружность с центром в точке O и радиусом OA; точка пересечения биссектрис треугольника ABC и т. п.). В задачах, условия которых содержат вопрос: «Верно ли, что...» — слова «да» или «нет».

5. Методические замечания. Чаще всего здесь даются ссылки на литературу для более глубокого знакомства с материалом, на котором основана задача. Это могут быть учебники, различные пособия, статьи в журналах, книги.

Иногда здесь указывается еще один способ решения задачи, иногда дается обоснование большей целесообразности приведенного способа решения по сравнению с другими (может быть, более короткими и естественными).

Б. Каталогизированные параметры

(допускается не только просмотр, но и поиск задач по ним)

1. По-видимому, самыми важными параметрами, по которым можно подбирать задачи, являются объекты, понятия, факты (теоремы и аксиомы), методы и приемы решения, используемые в задаче и ее решении. Система позволит подобрать как задачи, наилучшим образом иллюстрирующие применение того или иного метода или факта, так и большое количество задач, его использующих, для дальнейшей отработки и проверки материала.

2. Тема. В определенном смысле этот параметр является вспомогательным, так как он в значительной степени перекрывается теми фактами и методами, используемыми в решении задачи, а также объектами и понятиями, с которыми эта задача связана. Все же иногда удобно получить сразу подборку задач на определенную тему, в конце концов не любую задачу, использующую в своем решении теорему Пифагора, можно рекомендовать при изучении теоремы Пифагора. Например, следующая задача, кроме того, требует еще и знания того, что биссектриса делит основание треугольника на отрезки, пропорциональные его боковым сторонам.

(2106^3)[4]. Высота BL ромба $ABCD$, опущенная на сто-

[1] Точнее сказать, по этим полям все-таки возможен контекстный поиск, но это довольно трудоемкая и длительная операция.

[2] См.: *Пойа Д.* Как решать задачу. М., 1961. С. 12.

[3] В скобках приведен условный номер задачи в системе.

[4] Вступительный экзамен в МФТИ, 1988 г.

рону AD, пересекает диагональ AC в точке E. Найдите AE, если известно, что $BL=8$, $AL:LD=3:2$ (сложность 14).

Безусловно, более подходящи в этом случае задачи:

(2006)[5]. Из одной точки проведены к данной прямой перпендикуляр и две наклонные. Найдите длину перпендикуляра, если наклонные равны 41 и 50 см, а их проекции на данную прямую относятся как 3:10 (сложность 5).

Или еще один пример:

(2009)[6]. В равнобедренной трапеции основания равны 10 и 24 см, боковая сторона 25 см. Найдите высоту трапеции (сложность 4).

3. Ссылки и прецеденты использования. Здесь приведена известная нам информация о наличии данной задачи в книгах, а также об использовании задачи в различных учебных курсах, контрольных работах, вступительных и других экзаменах, олимпиадах. Мы, безусловно, не можем гарантировать полноту таких ссылок. Это, к сожалению, относится и к литературе. Во многих случаях оказывается, что нам неизвестно первое упоминание задачи. Мы всегда будем благодарны за более полную информацию.

4. Сложность. Сложность задачи может зависеть от многих причин. В частности, существенное влияние может оказать контекст, в котором оказывается задача — какие другие задачи предлагались до нее. Указываемая нами сложность — это сложность задачи вне контекста; определенный подбор такого контекста может критическим образом облегчить задачу. Мы указываем сложность в баллах — от 1 до 50. В связи с затрудненностью объективных оценок реальная разница в сложности двух задач обеспечивается только, если их баллы отличаются не меньше чем на 5. Хотя можно искать задачи со сложностью в любом заданном диапазоне (например, от 13 до 27), ориентироваться в нашей шкале вам поможет следующая таблица.

Сложность заключена в диапазоне 1—10.

Задачи для решения на школьных уроках. Одно-двухходовые задачи, которые удобно предлагать непосредственно после изучения той или иной теоремы, свойства объекта. Такие задачи обычно служат для иллюстрации изучаемых теорем. Чаще всего цель таких задач — научить применению полученных знаний, навыков. Задачи такой трудности предлагаются также на вступительных экзаменах в технические вузы без повышенных требований к математике.

Типичные задачи из этого диапазона.

(4000)[7]. Сторона треугольника равна 21 см, а две другие стороны образуют угол в 60° и относятся как 3 : 8. Найдите эти стороны (сложность 6).

(328)[8]. Периметр равнобедренной трапеции, описанной около круга, равен p. Найдите радиус этого круга, если известно, что острый угол при основании трапеции равен α (сложность 7). В частности, наиболее простые задачи (сложность 1—5):

(190)[9]. Из точки на окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу. Найдите угол между ними (сложность 4).

(1100)[10]. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC и углом при вершине B, равным 36°, проведена биссектриса AD. Докажите, что треугольники CDA и ADB — равнобедренные (сложность 4).

Сложность заключена в диапазоне 11—20.

Задачи этой категории требуют от школьников достаточно глубокого понимания учебного материала. На обычном школьном уроке за решение одной такой задачи не жалко поставить «5». На уроке в математическом классе это можно отнести к задачам, оцененным в 15—20 баллов. К рассматриваемой категории относится подавляющее большинство задач вступительных экзаменов в вузы с повышенными требованиями по математике. Это также задачи районных, реже городских математических олимпиад, математических кружков. Типичная задача из этого диапазона:

(2093)[11]. В остроугольном треугольнике ABC проведены биссектриса AL и медиана CM. Точки K и N являются ортогональными проекциями на сторону AC точек L и M соответственно, причем $AK:KC=4:1$, $AN:NC=3:7$. Найдите отношение $AL:CM$.

Сложность заключена в диапазоне 21—30.

В эту категорию входят задачи повышенной трудности. Для их решения требуется свободное владение не только программным материалом, но во многих случаях и опытом, выходящим за рамки школьной программы. И, что очень важно, такие задачи целесообразно предлагать лишь тем ученикам, которые имеют ярко выраженные математические способности. Задачи такой трудности встречаются среди наиболее трудных задач вступительных экзаменов в МГУ, МФТИ, на городской, межреспубликанской, международной математических олимпиадах, на математических кружках высокого уровня, математических конкурсах и т. д.

В этот диапазон входит, например, задача.

(171)[12]. Докажите, что если для вписанного четырехугольника $ABCD$ выполнено равенство $CD=AD+BC$, то биссектрисы его углов A и B пересекаются на стороне CD (сложность 28).

Сложность заключена в диапазоне 31—40.

Это задачи, которые нельзя научить решать путем натаскивания даже сильного ученика. Именно такие задачи оказываются порогом возможностей для многих олимпиадников. Они очень трудны технически или содержат нетривиальные идеи. Это наиболее трудные задачи олимпиад высокого уровня, однако нормальное время на решение такой задачи — несколько дней. Столь сложная задача имеет индивидуальность, и, поскольку ее решение сильно зависит от вкусов решающего, сравнительная оценка трудностей таких задач еще более условна. Одна из самых трудных задач в системе.

(122)[13]. Через середину C произвольной хорды AB окружности проведены две хорды KL и MN (точки K и M лежат по одну сторону от AB). Отрезок KN пересекает AB в точке P. Отрезок LM пересекает AB в точке Q. Докажите, что $PC=QC$ (сложность 32).

Сложность 41 и выше.

Задачи, трудность которых примерно соответствует результатам оригинальных работ. Их решение иногда даже неизвестно.

5. Найти полное описание известных задач можно, используя параметр: название задачи (если есть). Можно выбрать задачи, имеющие собственные названия. Это могут быть как общепринятые названия, например

[5] *Рыбкин Н.* Сборник задач по геометрии. Ч. I. Планиметрия. М., 1962. № 25 (3).

[6] *Рыбкин Н.* Сборник задач по геометрии. Ч. I. Планиметрия. М., 1962. № 21 (1). С. 55.

[7] *Рыбкин Н.* Сборник задач по геометрии. Ч. I. Планиметрия. М., 1962. № 88. С. 63.

[8] Вступительный экзамен на филфак МГУ, 1975 г.

[9] *Рыбкин Н.* Сборник задач по геометрии. Ч. I. Планиметрия. М., 1962. № 9. С. 27.

[10] *Рыбкин Н.* Сборник задач по геометрии. Ч. I. Планиметрия. М., 1962. № 46. С. 17; *Погорелов А. В.* Геометрия: Учебное пособие для 7—11 классов. М., 1989. № 23. С. 49.

[11] Вступительный экзамен в МФТИ, 1985 г. Билет 9. № 4.

[12] Квант. 1980. № 4. С. 30. Задача М619.

[13] *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Ч. II. Геометрия (планиметрия). М., 1952. № 1. 45(а). С. 17; *Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л.* Новые встречи с геометрией. М., 1978. С. 59; *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. Ч. I. М., 1986. № 104. С. 33.

«Теорема Фалеса», так и фольклорные, традиционные, например «Теорема о двух милиционерах».

6. Автор задачи (если есть). Этот параметр относится лишь к небольшому числу задач. Конечно, нам не всегда могут быть известны авторы. В этих случаях мы заранее приносим им свои извинения и будем очень благодарны за соответствующую информацию. В основном информация об авторах взята из журналов «Квант» и «Математика в школе».

В. Атрибуты задачи

(допускается не только просмотр, но и поиск задач по ним)

Для каждой задачи может быть установлен любой набор из следующих атрибутов:

на построение, доказательство, вычисление, геометрическое место точек, максимум и минимум, а также:

ключевая, синтетическая, громоздкая, техническая, оформительская, учебная, олимпиадная, исследовательская, важная.

Кроме того, некоторые атрибуты могут сопровождаться комментарием «очень», «пожалуй», например «очень красивая», «пожалуй, ключевая». В редких случаях может быть установлено отрицание атрибута «не», например «неключевая».

В режиме «Поиск» при отыскании по атрибутам будут найдены все задачи, у которых значение атрибута не ниже заданного, т. е. если у вас против названия атрибута «красивая» будет написано слово «пожалуй», то будут найдены «пожалуй, красивые», «красивые» и «очень красивые» задачи.

Описание атрибутов

Ключевая — задача, ярко иллюстрирующая определенную идею, ее решение представляет трудность, пока идея неизвестна, а при знании ключевой идеи задача сильно упрощается.

Значение таких задач состоит, например, в том, что часто встречающаяся (а следовательно, важная) идея является естественной, но именно поэтому, сформулированная в чистом виде, выглядит тривиально и не видна. Ее силу можно видеть на ключевых задачах.

Как правило, такие задачи — подготавливающие для достаточно большого набора задач, содержащихся в системе.

Следует отметить, что ключевые задачи полезно разделить на два типа. К первому типу мы будем относить задачи, сообщающие некий полезный факт, используемый при решении различных геометрических задач. Их можно называть «задача-теорема». Ко второму типу — «задача-метод» — мы будем относить задачи, решение которых может служить хорошей иллюстрацией того или иного метода, приема, идеи. В подобного рода задачах иллюстрируемая идея выступает в чистом виде, не «загрязненном» ни посторонними идеями, ни техническими деталями.

Безусловно, наибольшую ценность в качестве ключевых имеют задачи, в которых соединяются оба этих типа: и сообщается важный факт, и иллюстрируется полезная идея решения. Примером может служить следующая задача.

(219)[14]. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и AC в точках M и N. Докажите, что $AM=AN=p-a$ (p — полупериметр треугольника ABC, $a=BC$) (сложность 10).

Сообщаемая в этой задаче формула весьма полезна и очень часто работает в задачах, где фигурируют треугольники и вписанные окружности.

[14] *Шарыгин И. Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия. М., 1986. № 18. С. 8.

Используемый при решении этой задачи метод, который условно можно назвать «метод касательных», основанный на вполне тривиальной идее — касательные, исходящие из одной точки, равны между собой,— оказывается очень плодотворным при решении различных задач «на окружности и касательные», часть из которых чрезвычайно трудна. Причем именно данная задача, на наш взгляд, наиболее точно и лаконично иллюстрирует указанный метод среди всех входящих в банк задач.

Еще пример.

(1209). С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей (сложность 14).

Эту задачу удобно решать с помощью достраивания треугольника до параллелограмма. Этот метод применяется при решении довольно большого количества задач на разные темы школьной геометрии. Вот некоторые из этих задач.

(3504)[15]. Докажите, что медиана треугольника ABC, проведенная из вершины A, меньше полусуммы сторон AB и AC (сложность 13).

(3521)[16]. Дан треугольник ABC, CD — медиана, проведенная к стороне AB. Докажите, что если $AC>BC$, то угол ACD меньше угла BCD (сложность 14).

(1210)[17]. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник по трем медианам (сложность 17).

(4014)[18]. Стороны треугольника равны a, b, c. Докажите, что медиана m_c, проведенная к стороне c, равна $\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$ (сложность 10).

(1243)[19]. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{15}$ см, а медиана третьей стороны равна 2 см (сложность 13).

Ключевой задачей, сообщающей полезный факт, является следующая.

(1204)[20]. Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма (сложность 8).

Доказательство этого утверждения вполне очевидно, но сообщаемый факт, безусловно, полезен и должен входить в число обязательных знаний большинства школьников.

И наконец, следующая задача может служить иллюстрацией типа «задача-метод», хотя никакого конкретного геометрического факта она не содержит.

(1272). Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 3 и 5, а средняя линия равна 2 (сложность 15).

Полезный прием, часто используемый в задачах, где фигурируют диагонали трапеции, иллюстрируемый данной задачей, состоит в параллельном переносе одной из диагоналей. При этом образуется треугольник со сторонами 3, 5 (диагонали трапеции) и 4 (сумма оснований), равновеликий данной трапеции.

Важная — задача, которая, как нам кажется, наилучшим образом иллюстрирует эффективность того или иного приема или метода. Без этой задачи трудно обойтись при изучении соответствующей темы.

[15] *Погорелов А. В.* Геометрия: Учебное пособие для 7—11 классов. М., 1989. № 64. С. 97.

[16] *Погорелов А. В.* Геометрия: Учебное пособие для 7—11 классов. М., 1989. № 24. С. 154.

[17] *Рыбкин Н.* Сборник задач по геометрии. Ч. I. Планиметрия. М., 1962. № 8 (1). С. 93.

[18] *Рыбкин Н.* Сборник задач по геометрии. Ч. I. Планиметрия. М., 1962. № 1. С. 92.

[19] Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы / Под ред. *М. И. Сканави.* № 10. 327.

[20] *Погорелов А. В.* Геометрия: Учебное пособие для 7—11 классов. М., 1989. № 47. С. 80.

Само название «важная» показывает, что данная задача должна быть рассмотрена при изучении соответствующей темы или метода. В частности, изучив ключевую задачу, необходимо предложить учащимся соответствующую серию задач не только на отработку этого приема, но и обладающую определенной развивающей динамикой, идущей прежде всего по линии «важных» задач. Так, например, доказав утверждение задачи (219), следовало бы в соответствующую учебную серию включить как безусловно «важную» такую задачу.

(405)[21]. В равнобедренном треугольнике ABC на основании AB взята точка D так, что $AD=a$, $BD=b$. Найдите расстояние между точками касания со стороной CD окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD (сложность 14).

Данная задача, решение которой основано на использовании формулы из задачи 219, несет также определенный развивающий импульс, способствует раскрепощению ученика. Ведь нужны определенная смелость, математический кругозор, чтобы применить формулу, когда большинство величин, в нее входящих, отсутствует в условии.

«Важность» задачи может заключаться и в ее воспитательном характере. Таковы, например, задачи, где описываемая геометрическая ситуация может быть реализована не единственным образом, когда кроме очевидного есть еще и достаточно замаскированный, малоочевидный вариант. Такие задачи развивают внимательность, умение находить и обходить ловушки. Такова, например, следующая задача.

(795)[22]. В параллелограмме $ABCD$ угол ACD равен 30°. Найдите угол ABD, если известно, что центры окружностей, описанных около треугольников ABD и BCD, расположены на диагонали AC (сложность 18).

В этой задаче существует опасность прозевать случай совпадения указанных в условии центров. Указанная в условии задачи ситуация имеет место в двух случаях: если $ABCD$ — ромб или $ABCD$ — прямоугольник.

К категории «важных» мы относим и следующую задачу.

(4047). Докажите, что в любом треугольнике отношение суммы квадратов медиан к сумме квадратов сторон равно 3/4 (сложность 13).

Важность этой задачи обусловливается не только тем, что в ней эффективно используется формула длины медианы. Сообщаемый в ней факт весьма интересен, имеет необычайно общий характер, хотя особого применения в других задачах не имеет.

Синтетическая. Требует синтеза нескольких идей, причем для решения такой задачи нужно не только найти каждую идею, но и соединить их вместе. Как правило, синтетическая задача в равной степени может быть отнесена к разным темам. Большая часть задач вступительных экзаменов — синтетические.

Синтетические задачи, требующие применения различных приемов и методов, в решении которых используются различные теоремы геометрии, типичны для конкурсного экзамена, особенно в ведущие вузы страны. Проиллюстрировать сколько-нибудь полно различные стандартные ситуации практически невозможно. Ограничимся одним примером.

(36)[23]. В круге проведены две хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M. K — точка пересечения биссектрисы угла BMD с хордой BD. Найдите отрезки BK и KD, если $BD=3$, а площади треугольников CMB и AMD относятся как 1:4 (сложность 13).

Решение задачи несложно и синтезировано из нескольких стандартных блоков. Из равенства вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу, следует подобие треугольников AMD и CMB. Коэффициент подобия равен квадратному корню из отношения площадей этих треугольников, т. е. 2. И наконец, из свойства биссектрисы треугольника следует, что отрезки BK и KD относятся как стороны BM и DM треугольника DMB.

Громоздкая — задача, в которой более или менее ясен путь решения, она довольно легко разбивается на этапы. Основная трудность при решении таких задач обычно связана с большими вычислениями, перебором случаев и т. п.

Громоздкие задачи также типичны для конкурсного экзамена. Для этих задач характерна многоэтажность, сопровождаемая вычислительными, даже арифметическими трудностями, причем довольно часто сами этапы малоотличимы друг от друга. Подобные задачи нередко выглядят весьма искусственными, хотя проверочные и оценочные функции они выполняют неплохо. С методической точки зрения в учебном процессе подобные задачи могут быть использованы для развития вычислительной выносливости, умения составлять план в многоходовых задачах. В качестве иллюстрации можно предложить следующую задачу.

(4063)[24]. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и CA соответственно взяты точки K, L, M. Известно, что $AK=5$, $KB=3$, $BL=2$, $LC=7$, $CM=1$, $MA=6$. Найдите расстояние от точки M до середины KL (сложность 12).

Громоздкое решение этой семиходовой задачи совершенно очевидно. Сначала находим косинусы углов треугольника ABC (три раза применяем теорему косинусов), затем находим стороны треугольника KLM (еще три раза применяем теорему косинусов) и наконец находим медиану треугольника KLM.

Конечно, пример этот несколько надуман, но нечто подобное встречается на конкурсных экзаменах. Очень часто громоздкие задачи представляют собой своеобразные задачи-«матрешки» или задачи-«этажерки», в них соединяется искусственно или достаточно естественно несколько задач. Главная трудность — выстроить эти задачи в цепочку. Как правило, громоздкая задача видна уже по условию, также громоздкому.

Вот пример весьма трудной громоздкой задачи, предлагая которую следует дать школьникам и план решения.

(796)[25]. Около треугольника ABC описана окружность с центром в точке O. Касательная к окружности в точке C пересекается с прямой, делящей пополам угол B треугольника, в точке K, причем угол BKC равен половине разности утроенного угла A и угла C треугольника. Сумма длин сторон AC и AB $2+\sqrt{3}$, а сумма расстояний от точки O до сторон AC и AB равна 2. Найдите радиус окружности (сложность 28).

Существенным для решения задачи является четкое рассмотрение случаев: 1) точка K расположена на продолжении биссектрисы за сторону AC; 2) точка K расположена на продолжении биссектрисы за точку B. В первом случае получаем, что угол C равен 90°, и в дальнейшем приходим к противоречию. Во втором случае оказывается, что угол A равен 30°.

На втором этапе вновь возникают два случая: 1) точка O — внутри треугольника ABC; 2) точка O — вне треугольника ABC. Вновь первый случай приводит к противоречию.

[21] *Шарыгин И. Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия. М., 1986. № 28. С. 9.

[22] Автор задачи *С. Маркелов.*

[23] Вступительный экзамен на биофак МГУ. 1975 г. Вариант I. № 6.

[24] *Шарыгин И. Ф.* Факультативный курс по математике. Решение задач: Учебное пособие для 10 класса. М., 1989. № 211. С. 208.

[25] *Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К.* Задачи вступительных экзаменов. М., 1986. Вступительный экзамен на ВМК МГУ. 1982 г. Вариант I. № 6.

Техническая. На отработку стандартных приемов и методов.

Техническая задача используется для закрепления стандартной техники. Примером такой задачи может служить следующая.

(3105). На сторонах треугольника ABC взяты точки K, L и M так, что $AK:KB=2:3$, $BL:LC=1:2$, $CM:MA=3:1$. В каком отношении отрезок KL делит отрезок BM? (сложность 17).

Эта задача может служить для отработки как техники, основанной на использовании теоремы Менелая, так и «метода площадей».

(Если использование теоремы Менелая в этой задаче достаточно понятно, то применение в ней «метода площадей», возможно, нуждается в пояснении. Пусть O — точка пересечения KL и BM. Если обозначить $BO:BM=x$, а площадь треугольника ABC через S, то легко найдем: $S(BKL)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot S=\frac{1}{5}S$, $S(ABM)=\frac{1}{4}S$, $S(BCM)=\frac{3}{4}S$, $S(BOK)=\frac{3}{5}\cdot x\cdot S(BAM)=\frac{3x}{20}\cdot S$, $S(BOL)=\frac{x}{4}\cdot S$, и из уравнения $S(BKL)=S(BOK)+S(BOL)$ или $\frac{1}{5}=\frac{3x}{20}+\frac{x}{4}$ найдем: $x=\frac{1}{2}$, т. е. точка O делит отрезок BM пополам.)

Оформительская. Решение такой задачи на интуитивном уровне относительно несложно, труднее сформулировать и записать его строго.

Примером оформительской задачи может служить следующая.

(830). Найдите радиус наибольшей окружности, касающейся изнутри двух пересекающихся окружностей с радиусами R и r, если расстояние между их центрами равно $a(a<R+r)$ (сложность 18).

Интуитивно вполне очевидно, что центр искомой окружности должен быть расположен на прямой, проходящей через центры данных, а радиус равен $\frac{1}{2}\cdot(R+r-a)$. Однако доказательство этого утверждения требует определенного уровня математической культуры.

Следует заметить, что каждая задача некоторым образом задает свой уровень доказательности, за которым необходимые геометрические факты считаются очевидными. В одних случаях мы должны доводить наши рассуждения чуть ли не до аксиоматического уровня (особенно это касается учебных задач), в других — ограничиваться доказательством лишь более или менее содержательных фактов, поскольку большее углубление приведет к чрезмерной громоздкости решения, причем громоздкости не по существу.

Оформительской может быть также задача, в которой возникает необходимость перебора большого числа однородных вариантов. Упущение хотя бы одного из вариантов приводит к неполноте решения. В то же время изучение каждого варианта осуществляется одинаковым образом. Примером здесь может служить следующая известная (элементарная) задача.

(995). Дан треугольник ABC. На прямых AB, BC и CA взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно, отличные от вершин треугольника. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AB_1C_1, A_1B_1C, A_1BC_1, пересекаются в одной точке (точка Микеля) (сложность 20).

Для всех случаев расположения точек A_1, B_1 и C_1 начало рассуждения одинаково. Обозначим через M точку пересечения окружностей, описанных около треугольников AB_1C_1 и A_1B_1C, и докажем, что точка M лежит на окружности, описанной около треугольника A_1BC_1. И здесь возникает необходимость рассматривать различные возможности расположения как точек A_1, B_1 и C_1, так и точки M. Причем даже в простейшем случае — точки A_1, B_1 и C_1 лежат на сторонах треугольника — точка M может быть и внутри, и вне треугольника ABC. В решении можно разобрать два (или даже один) варианта, указав остальные.

Логично, конечно, перейти к ориентированным углам, но при этом решение становится слишком сложным технически.

Так что, как видим уже на этом примере, оформительская задача может оказаться достаточно трудной.

Учебная. Основная цель — обучение решению задач, по сложившейся традиции считающихся типичными для школьных уроков, выпускных и вступительных экзаменов. Такая задача может особенно ярко демонстрировать применение той или иной идеи, метода решения, проверять владение определенной техникой.

Характеристика «учебная» в принципе может относиться к любой задаче, поскольку любая задача может быть использована в учебном процессе. Сюда относятся, например, стандартные задачи на решение треугольников — вычисление высоты, радиуса вписанной или описанной окружности по стандартным данным — трем сторонам, двум сторонам и углу и т. д. Сюда же относятся и задачи, с помощью которых отрабатываются отдельные технические приемы и методы, стандартные дополнительные построения и т. п. Примеры достаточно очевидны и в особых комментариях не нуждаются.

К категории олимпиадных относятся задачи, как уже предлагавшиеся на различных олимпиадах (районных, городских, республиканских) или конкурсах (журналы «Квант», «Математика в школе»), так и менее известные, оставшиеся по различным причинам в архивах, предлагавшиеся на математических кружках, на математических боях и даже совсем неизвестные, составленные специально для данного банка. Более известные задачи могут быть использованы в работе с наиболее одаренными школьниками, при подготовке к математическим олимпиадам разного уровня; из менее известных можно формировать школьные олимпиады, задания для турниров и матбоев. Как и в предыдущем случае, особой необходимости в примерах нет.

Исследовательская. Подразумевает самостоятельное исследование, возможно, изучение литературы.

Что касается исследовательских задач, то здесь особый интерес представляют задачи, к работе над которыми могут быть привлечены школьники с различным уровнем подготовки, а не только самые выдающиеся, причем даже не очень сильные в математике ученики имеют возможность добиться определенного творческого успеха, проявив достаточную настойчивость.

Следующая по списку характеристика — красивая, вполне может относиться к любой содержательной геометрической задаче. Красота задач может быть вызвана многими причинами. Возможна красота формулировки, красота факта, красота идеи или красота синтеза идей. Даже громоздкая, на первый взгляд не очень содержательная задача может обладать определенным эстетическим потенциалом (красота уродства!?). Безусловно, эта характеристика, как, впрочем, и большинство других, носит субъективный характер. Но все же по поводу многих задач имеется достаточно единое мнение — задача красивая. При этом задача может быть красивой даже сугубо с точки зрения формулировки. Вот пример.

(170)[26]. Докажите, что для произвольного треугольника проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного одной из его сторон, на другую сторону равна третьей стороне (сложность 14).

За этой необычайно красивой с чисто литературной точки зрения формулировкой скрывается всего-навсего теорема синусов, а вернее, сопутствующее ей равенство $a=2R\cdot\sin\alpha$.

Вообще, эстетичность формулировки — качество, которым должна обладать каждая сколько-нибудь интересная

[26] Квант. 1979. № 11. С. 25. Задача М592.

геометрическая задача. К сожалению, об этом часто забывают организаторы различных конкурсов и олимпиад, руководители конкурсных комиссий. В результате возникают всевозможные уродцы, изобилующие ненужной символикой, с корявой стилистикой.

Конечно, красота формулировки не сводится к одной литературе. Главное — все же геометрическое содержание, красота, неожиданность сообщаемого факта, неожиданный взгляд на обычную ситуацию. Вот два примера.

(1274). Докажите, что если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника: а) равны, то диагонали четырехугольника перпендикулярны; б) перпендикулярны, то диагонали четырехугольника равны (сложность 12).

Симметричность формулировки — взаимозаменяемость равенства и перпендикулярности — производит большое эстетическое впечатление, хотя данный факт очевидным образом следует из задачи 1204 (ключевой).

(993). Дана прямая и точка A вне ее. Опустите из точки A перпендикуляр на прямую, проведя не более трех линий циркулем и линейкой (третьей линией должен быть искомый перпендикуляр) (сложность 17).

Эта задача заставляет нас задуматься над привычным и обыденным построением. Оказывается, большинство осуществляет его весьма нерационально. Самым экономным и удобным является следующее построение: проведем через точку A две произвольные окружности с центрами на данной прямой, а затем прямую через точку A и вторую точку пересечения этих окружностей. И все.

И наконец, нельзя не сказать о красоте решения геометрической задачи. Правда, очень часто красивое решение не является общим. Иногда даже данная задача является чуть ли не единственной известной задачей, где проходит подобная идея. Красивое решение — почти всегда короткое. Именно это имеет место в следующей задаче.

(994). Докажите, что если в четырехугольнике два каких-то противоположных угла тупые, то диагональ, соединяющая эти вершины, меньше другой диагонали (сложность 18).

Все решение этой задачи сводится к рассмотрению окружности, построенной на второй диагонали как на диаметре.

Г. Ссылки между задачами

Сюда относятся прежде всего следующие виды ссылок между задачами:

— подготавливающие задачи, т. е. задачи, которые желательно прорешать до данной;

— подготавливаемые задачи;

— аналоги, т. е. различные варианты, по существу, одной и той же задачи.

При желании в системе могут быть установлены и другие виды ссылок.

5. Благодарности

Авторы выражают благодарность всем принимавшим участие в реализации первого этапа работы: В. Ю. Протасову, Д. М. Тейблюму (Московский независимый университет, II курс), С. Маркелову (57-я школа, XI класс), А. А. Панову (Мехмат МГУ, II курс), А. Иншакову (57-я школа, XI класс), С. В. Вьюкову (МФТИ, II курс), Я. Г. Мостовому (МФТИ, VI курс), И. С. Рубанову (Кировский пединститут, кафедра геометрии); М. А. Букатину, участвовавшему в первоначальной разработке проекта; А. М. Абрамову, Е. Г. Глаголевой, Г. В. Кондакову, Л. Б. Огуре, В. В. Прасолову, И. В. Раскину, высказавшим много полезных соображений в ходе совместных обсуждений, а также учащимся 57-й школы, техническим сотрудникам мп «АРКАДИЯ» и ДНТТМ, осуществлявшим ввод задач в систему и оказавшим техническую помощь.

Всех, заинтересовавшихся этой разработкой, просим обращаться по адресу: Москва, 117419, Донская ул., д. 37, ДНТТМ, телефон: (095) 954-00-12.

Результаты международного исследования математической подготовки школьников 9 и 13 лет

К. А. Краснянская, Л. В. Кузнецова (Москва)

В условиях расширяющегося международного сотрудничества, формирования открытого рынка труда очень важно, чтобы уровень образования в каждой стране соответствовал мировым стандартам. Во второй половине XX в. в различных странах в отдельности и в мире в целом были развернуты исследования по сравнительной оценке достижений школьников определенных возрастных групп по математике. В 1989 г. Американский центр педагогического тестирования ETS (Educational Testing Service) провел второе[1] международное исследование по сравнительной оценке подготовки учащихся 9 и 13 лет (International Assessment of Educational Progress — IAEP-II). В нем приняли участие 20 стран мира: Англия, Бразилия, Венгрия, Израиль, Иордания, Испания, Италия, Канада, Китай, Мозамбик, Португалия, СССР, США, Тайвань, Франция, Швейцария, Шотландия, Югославия (Словения), Южная Корея.

Для проведения этого исследования в СССР был создан Временный научно-исследовательский коллектив под руководством академика В. Г. Разумовского «Международная оценка подготовки школьников» при НИИ общего среднего образования. Привлекались также специалисты из НИИ социологии АН СССР, НИИ общей педагогической психологии и ГИВЦ Гособразования. В отдельных регионах организация исследования осуществлялась через министерства народного образования республик, управления народного образования областей и городов, республиканские НИИ педагогики, областные и городские ИУУ. Всего в нем приняли участие около 800 работников народного образования.

Финансировалось исследование Академией педагогических наук СССР.

В исследовании участвовали почти все республики СССР, кроме Грузии и Узбекистана. Из-за ограниченных финансовых возможностей удалось провести исследование только в школах с обучением на русском языке — языке межнационального общения в стране. Выборка учащихся формировалась по методике, используемой ETS, в основе которой лежит метод случайного отбора 110 школ и 1600 учащихся соответствующего возраста из этих школ. От России в выборку вошли ряд школ Москвы и Ленинграда, республик Татарстан и Якутия, Красноярского, Приморского, Ставропольского краев, Владимирской, Вологодской, Воронежской, Ульяновской, Челябинской областей. Украина была представлена несколькими школами из Киевской, Луганской, Одесской, Ровенской областей, Белоруссия — школами из Витебской и Минской областей, от Казахстана были выбраны ряд школ Чимкентской и Целиноградской областей.

Согласно условиям исследования предполагалось проверить подготовку учащихся 9 и 13 лет во всех классах, в которых они обучаются. Например, в СССР в выборке были представлены учащиеся 9 лет из вторых и третьих классов трехлетней начальной школы, а также третьих и четвертых классов четырехлетней школы; учащиеся 13 лет из седьмых и восьмых классов. Объем выборок по разным странам варьировал от 1200 до 1800.

Заметим, что только в восьми странах из 20 (Венгрия, Ирландия, Иордания, Словения, США, Тайвань, Франция,

[1] Первое международное исследование по сравнительной оценке подготовки учащихся (IAEP-I) проводилось в 1987—1989 гг. в шести странах: в Англии, Ирландии, Испании, Канаде, Южной Корее, США.