

## План лекций по дифф геом (А Рослый) окт2016

1. Линейная алгебра: тензорная алгебра, симметрические и кососимметрические тензоры, операции с тензорами, кольца, дифференцирования, суперкоммутативная алгебра.
2. Координаты, замены координат в (области в)  $\mathbb{R}^n$ , касательные векторы, векторные и тензорные поля.
3. Многообразия, касательное расслоение, векторные и тензорные поля, операции с ними. Дифференциальные операторы.
4. Диффеоморфизмы и замены координат. Инвариантные относительно диффеоморфизмов операции и дифференциальные операторы.
5. Векторные поля и инфинитезимальные диффеоморфизмы, обыкновенное дифф. уравнение и экспонента векторного поля. Коммутатор векторных полей. Производная Ли. Группы Ли.
6. Подмногообразия. Распределения в касательном расслоении, условие интегрируемости, теорема Фробениуса.
7. Комплекс де Рама, локальная теория. Лемма Пуанкаре.
8. Интегрирование дифференциальных форм по подмногообразиям. Теорема Стокса. Обобщённые функции (формы с обобщёнными коэффициентами, потоки).
9. Комплекс де Рама, глобальная теория. Когомологии Бетти, эйлерова характеристика. Гомологии. Двойственность Пуанкаре и потоки. Фундаментальная группа. Накрытия. Связь фундаментальной группы и одномерных гомологий.
10. Векторные расслоения. Связность, кривизна связности, упорядоченная экспонента. Группа голономии, локальная и глобальная. Плоская связность.
11. Риманова геометрия. Метрика, геодезические, подмногообразия, изометрии, векторы Киллинга.
12. Метрическая связность, оператор ковариантной производной, спин-связность и символ Кристоффеля. Кручение и кривизна, тензор Римана, тождества Риччи и Бьянки. Группа голономии локальная и глобальная. Классификация многообразий по группе голономии.
13. Разложение тензора Римана, тензор Риччи, скалярная кривизна, уравнения Эйнштейна.
14. Пространства постоянной кривизны. Двумерная гиперболическая метрика. Пространства (анти-) де Ситтера. Их группы и алгебры изометрии.

15. Метрическая форма объёма. Функционалы действия в теории поля на римановом многообразии. Оператор Лапласа. Псевдориманова геометрия. Пример топологической теории поля.
16. Преобразования Вейля. Безмассовые поля и конформная инвариантность, вейлевская инвариантность. Скаляр Бранса-Дикке.
17. Конформная геометрия, конформная группа и алгебра.
18. Оператор (звёздочка) Ходжа, конформная инвариантность. Четырёхмерие: самодуальность тензора Вейля и/или Римана.
19. Уравнения и функционал Янга-Миллса. Уравнения самодуальности. Топологический заряд.
20. Гармонические формы и когомологии.
21. Характеристические классы (классы Черна, Понтрягина, эйлеров класс), выражение через кривизну. Формы Черна-Саймонса. Сигнатура многообразия. Теорема Гаусса-Бонне.
22. Спинорные поля на римановом многообразии, спин-структура. Теорема Лихнеровича.
23. Понятие индекса (фредгольмова) оператора. Теорема об индексе оператора Дирака.
24. Симплектическая структура. Теорема Дарбу. Лагранжевы подмногообразия. Гамильтоновы векторные поля и их гамильтонианы. Скобки Пуассона, симплектические листы. Действие группы симплектоморфизмами, гамильтонова редукция. Квантовые аналоги этих понятий.
25. Супергеометрия.