НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

globus ГЛОБУС

Общематематический семинар

Манин Ю.И. Большой взрыв и Космологическое время: алгебро-геометрические модели

Юрий Иванович Манин, 2 сентября 2014

Я начну с того, что напишу план обозрения, в нём будут следующие пункты.

1. Границы.
2. Наблюдения: время в космологии.
3. Что происходит с космологическим временем на границе?
4. Модулярные кривые и Mixmaster Universe.
5. Границы и их переходы.

Вы все знаете, что после Эйнштейна в классической, неквантовой, теории гравитации пространство-время моделируется псевдоримановым многообразием с сигнатурой (1,3). Но первое, что сейчас меня будет занимать, — это границы пространства-времени. Это — математика.

Второе будет относиться к «физике», к наблюдениям; наиболее будет меня занимать космологическое время. Я поставил физику здесь в кавычках по той причине, что почти вся физика, к которой мы привыкли, занимается масштабами, которые сравнимы с человеческим масштабом, или много меньше, с уходом в микромир. На таких масштабах человек может наблюдать, может заниматься экспериментом, наконец, человек может заниматься тем, что я называю инженерией. Он может сочинять какие-то механизмы и смотреть, работают они или нет; если механизм работает, то прекрасно, если не работает, то можно пытаться понять, почему он не работает. На человеческих масштабах инженерия играла огромную роль. Это ещё не экспериментальная физика, не теоретическая физика, но нечто, что было пищей для физики. На масштабах вселенной совершенно невозможно заниматься ни экспериментом, ни инженерией. Тут можно только наблюдать. Если вы до чего-то догадались, то вам нужно очень долго думать и чесать затылок: а что бы такое наблюсти, что могло бы эту догадку опровергнуть или как-то частично подтвердить.

Третье тоже математическое: что происходит с космологическим временем на границе? Это вопрос, на который мне не смог ничего сказать Пенроуз; его доклад в Бонне, происшедший примерно полтора года назад, очень меня вдохновил на эту работу.

Четвёртый пункт — это тоже математика, соединение привычной алгебраической геометрии и теоретической физики (космологии). Модулярные кривые, с одной стороны, и модели вселенной, которые по-английски называются Mixmaster Universe, — с другой. Это некая вполне конкретная математическая модель, или, если угодно, конечномерное многообразие математических моделей. Сопоставление с модулярными кривыми играет важную роль в том, что я буду рассказывать.

И, наконец, пятый пункт — границы и их переходы, смесь математики и физики, где большую роль сыграл доклад Пенроуза, стимулировавший эту работу. Пенроуз использует термин crossover.

Давайте я начну с границ. Мне сначала нужно общее понятие границы, которое можно ввести в каком-то контексте, скажем, дифференциальной геометрии. Если у нас есть какое-то многообразие M, не обязательно компактное, то у него может быть открытое подмногообразие M^0, которое может нас интересовать. В многообразии M нужно взять замыкание подмногообразия M^0:

$$M \supset M^0 \subset \overline{M^0}.$$

Тогда относительно ситуации $M^0 \subset M$ (M^0 не само по себе, а куда-то вложено) разница $\overline{M^0} \setminus M^0$ — это граница. Граница, таким образом, является очень переменной геометрической структурой; она определена не самим многообразием, но многообразием плюс его вложение в другое многообразие. Это очень важно.

Граница используется для того, чтобы изучать асимптотическое поведение динамических систем и, в частности, решений дифференциальных уравнений. Если на M^0 есть какая-нибудь хорошо себя ведущая динамическая система или дифференциальное уравнение, то мы можем присоединить к M^0 границу и спросить: ведёт ли она себя хорошо и на границе и позволяет ли она узнать что-нибудь новое и интересное относительно поведения этой динамической системы или этого дифференциального уравнения на границе. Граница — это инструмент для изучение асимптотического поведения того, что нас интересует на этом уровне.

Теперь я приведу два примера, которые будут для меня центральными в дальнейшем.

Первый пример. Предположим, что у нас есть пространство Минковского M^4, т.е. плоское псевдориманово многообразие с сигнатурой (1,3) (или (3,1) — как нам удобно). Как многообразие оно — просто векторное пространство, только без фиксированного начала. Начало можно поместить

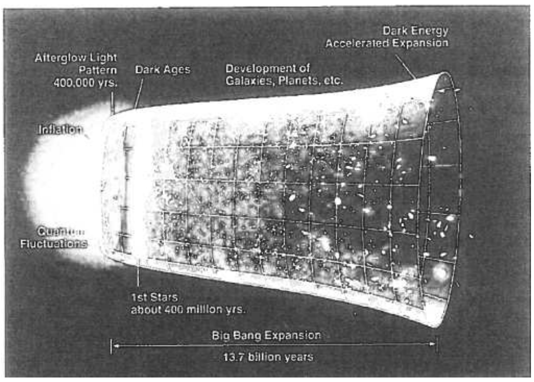

Рис. 1.

в любое место. Тогда, если воображать себе, что мы выбрали начало и M^4 стало векторным пространством, то его можно погрузить в проективное пространство: $M^4 \subset \mathbb{P}^4$. Тут есть два варианта: вещественный и комплексный. Если в комплексном варианте, то точки на бесконечности, т.е. на границе M^4, взаимно однозначно соответствуют классам прямых в M^4 с точностью до сдвига. С точностью до сдвига — потому что начало можно брать где угодно. Если вы фиксировали начало, то это просто прямые, проходящие через начало. Их классы на бесконечности — это одна точка. Это если комплексный случай. А если случай вещественный (это тоже важно для космологических моделей), то тогда возникает маленькая тонкость. Если всё вещественное, то в принципе можно рассматривать не просто прямые, но и прямые с ориентацией. Тогда на бесконечности будет лежать две точки. Это чуть-чуть непривычное для алгебраических геометров различие между вещественной и комплексной геометрией. Здесь граница $\partial M^4 = \mathbb{P}^3$ — трёхмерное проективное пространство.

Второй основной пример — это раздутие. Когда мы хотим устроить раздутие в одной точке p, тогда мы вынимаем из M^0 эту точку: $M^0 \setminus \{p\}$, и вместо неё вклеиваем проективное пространство касательных направлений. Опять то же самое различие между комплексной и вещественной геометрией: для комплексной геометрии проективное пространство, которое вклеено вместо точки, это комплексное проективное пространство, а для вещественной геометрии — это пространство, соответствующее ориентированным прямым.

Теперь я к этому добавлю один не очень существенный момент, введя прямо на картинке (рис. 1) нынешнюю схему того, как устроено пространство-время вселенной в космологии.

Вы должны вообразить себе космологическую модель четырёхмерного пространства-времени на масштабах много-много больше тех, к которым вы привыкли. По низу идёт ось времени, и протяжение от нулевой точки до точки, в которой мы сейчас находимся, это примерно 13,7 миллиарда лет. Однако время это не наивное наше время в солнечной системе, а космологическое — о нём я ещё буду говорить. На рисунке пространство в каждый момент времени — это вертикальное сечение. Где-то в районе нулевого времени согласно маханию рук, к которому привыкли космологи, произошёл Большой взрыв. До него пространства-времени не было, произошёл Большой взрыв, и дальше наступила эпоха, в течение которой пространство раздувалось с невероятной скоростью, много-много превосходящей скорость света. Это был так называемый период инфляций, который продолжался не очень долго, но примерно за 10^{-33} космологических секунд ничего превратилось в огромное пространство-время. И дальше продолжало расширяться с уже более вообразимой скоростью. Сейчас пространство-время с учетом гравитации, с усреднением по сверхгалактическим масштабам, является почти плоским и, по крайней мере локально, то, что мы можем наблюдать, похоже на пространство Минковского.

Теперь я представлю, что рис. 1 — это какая-то конкретно выбранная модель, какое-то псевдориманово многообразие, и сделаю следующее. Ту точку, в которой произошёл Большой взрыв и началось расширение, инфляционное в частности, я раздую, сделаю из неё дивизор. На рисунке 2 изображено что-то вроде проективного пространства, которое туда вклеится.

Но в этом проективном пространстве есть ещё одна структура. А именно, дело в том, что раз на этом касательном пространстве есть метрика, то среди касательных направлений выделены нулевые касательные направления. Они тоже образуют дивизор. Этот дивизор в комплексной гео-

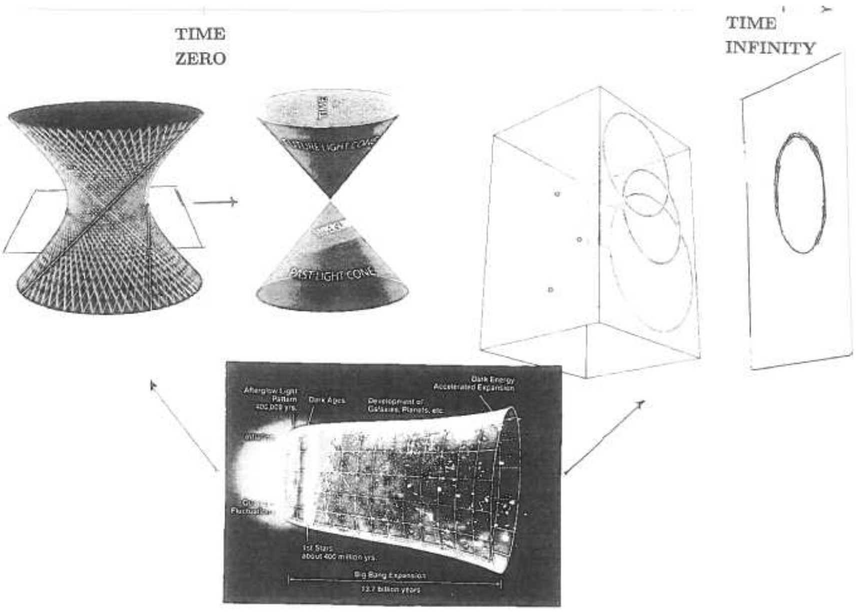

Рис. 2.

метрии — комплексная проективная квадрика (произведение проективной прямой на проективную прямую). Я попытался изобразить вещественную форму этой квадрики, обычный гиперболоид с двумя семействами прямых $\mathbb{P}^1$, которые умножаются одна на другую. Вся эта проективная квадрика лежит в трёхмерном проективном пространстве, которое я вклеил на границе. Там не просто $\mathbb{P}^3$, а $\mathbb{P}^3$ вместе с пространством нулевых направлений.

Если вы теперь учтёте то обстоятельство, что современная вселенная выглядит почти плоской, почти как пространство Минковского, и вообразите себе, что в достаточно отдалённом будущем это плоское приближение — это достаточно хорошее приближение к структуре пространства-времени, то тогда вы знаете, что можно попробовать приклеить туда проективное пространство. Это будет вторая граница. Первой границей была граница в момент нуль, вторая граница будет граница в момент бесконечность. И я хочу отметить, что в этой границе в момент бесконечность тоже есть канонически отмеченная квадрика. А именно, возьмите любой световой конус на конечном расстоянии, рассмотрите концы всех световых геодезических, которые на нём лежат; они находятся где-то на бесконечности. Теперь возьмите другой световой конус. Один конус получается из другого параллельным переносом. Поэтому соответствующие нулевые геодезические у одного конуса и у другого конуса имеют общую точку на бесконечности. Набор этих общих точек на бесконечности, базы всех световых конусов, они и есть та квадрика, которая у нас появлялась. И это более существенно, потому что после этого вы видите, что в самой простой, но и самой общей ситуации, если вы возьмёте пару пространств такого типа, то вы можете после раздутия нулевой точки приклеить то, что получилось, к другому пространству на бесконечности, поставив условие, чтобы совпадали эти базы световых конусов.

Теперь давайте я немного обсужу в качественном отношении, что такое космологическое время. Здесь вам нужно помнить, что когда вы рассматриваете какую-нибудь эйнштейновскую (или даже Минковского) модель пространства-времени, то там никакого абсолютного космологического времени нет. Что там такое время? Там есть математически точно определённое ds^2 — локальный квадрат метрики Минковского, квадратичная форма на касательном пространстве. У неё (1,3) или (3,1)-сигнатура; скажем, dt^2 минус какая-то квадратичная форма от dx, dy и dz. Эта форма определена инвариантно, а сами координаты не определены. Как вы можете получить координату ds? Выберите какую-нибудь кривую и ограничьте на неё; тогда это будет естественное время вдоль

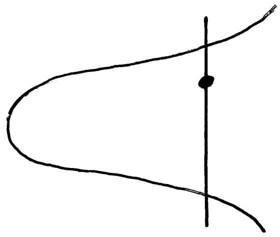

Рис. 3.

этой кривой. Скажем, выберите геодезическую. Тогда из формы ds^2, ограниченной на эту геодезическую, можно извлечь квадратный корень — это будет 1-форма, которая локально измеряет время вдоль этой кривой, вдоль этой геодезической. Скажем, в пространстве Минковского, если вы выбираете геодезическую, которая лежит внутри светового конуса (времениподобную геодезическую), то тогда ограничение её собственного времени на неё — это то же самое, что ограничение ds на неё, где ds^2 — это соответствующая метрика Эйнштейна.

Отметьте, что на геодезических, которые пространственноподобны, время оказывается чисто мнимым. На светоподобных геодезических время просто останавливается. Поэтому если вы вообразите себе вращающееся направление геодезической, то там есть стенка, которая определяется световым конусом. Где-то время вещественное, потом время останавливается, если вы летите со скоростью света (об этом пишут во всех популярных книжках по теории относительности), а потом время становится чисто мнимым (про это в популярных книжках по теории относительности не пишут, потому что мнимые числа являются очень трудными для популярного изложения; я это замечал даже, читая лекции Фейнмана).

Никакого места для космологического времени в этой конструкции нет. Космологическое время возникает только тогда, когда вы включаете в картину наблюдения, наблюдательную космологию, и потом сочиняете для того, что вы наблюдаете, какие-то математические модели.

Два примера, которые связывают теорию и наблюдения в космологии, это довольно разные наблюдательные величины. Одна — это так называемая температура (а мне будет нужна обратная температура) космического микроволнового радиационного фона. Сейчас принято, что значение, которое при этом наблюдается, температура реликтового излучения, которое находится в равновесии со вселенной и которое воспринимается радиотелескопами, измеряет глобальный возраст вселенной с того времени, когда вселенная перестала быть непрозрачной для света. Это случилось не очень скоро, примерно через 380 тысяч лет после Большого взрыва, но всё-таки по сравнению с миллиардами лет — довольно скоро. Я нашёл в какой-то физической статье замечательную цитату в качестве эпиграфа (не помню только, кто был автором этой цитаты): «Потом Бог сказал: Да будет свет. И свет стал. Но всё равно ничего не было видно, потому что ничего не было.» В данном случае это не так. Когда мы наблюдаем свет, то уже многое видно. Это одна наблюдательная величина. Другая — это так называемое красное смещение звёзд наблюдаемых галактик. Оно тоже приводится к соответствующей временной оси, и ещё оно умножается на константу Хаббла.

Оба эти инварианта (я сейчас не буду говорить об их связи) ставят наблюдаемые галактики на различные слои космологического времени. Когда мы наблюдаем галактику, то мы можем по наблюдаемому красному смещению отнести сечение (рис. 3) к тому или иному моменту космологического времени.

Рисунок 4 изображает некий небесный сектор; Земля находится в центре. То, что здесь выглядит как точки, — каждая точка это галактика. Чем галактика краснее, тем старше звёзды в этой галактике. Внешний круг находится, в общем-то, недалеко, на расстоянии примерно двух миллиардов световых лет. А то, что белым отмечено, — это невидимые галактики; увидеть их мешает пыль в нашей собственной галактике. Значения красного смещения расположены по вертикальной оси. Для каждой из таких галактик отмечается то сечение в галактическом времени, на котором мы его видим (рис. 5), потому что галактическое время более или менее пропорционально $1/T$, где T — температура.

Мы наблюдаем вселенную так, как Дюшан в своё время нарисовал женщину, спускающуюся по лестнице (рис. 6). Она видна в разные моменты времени для нас одновременно.

Теперь я в эту картинку попытаюсь включить границы. Я перехожу от наблюдений к теоре-

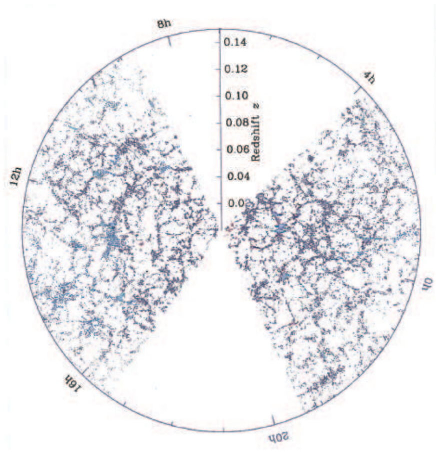

Рис. 4.

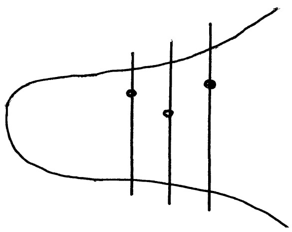

Рис. 5.

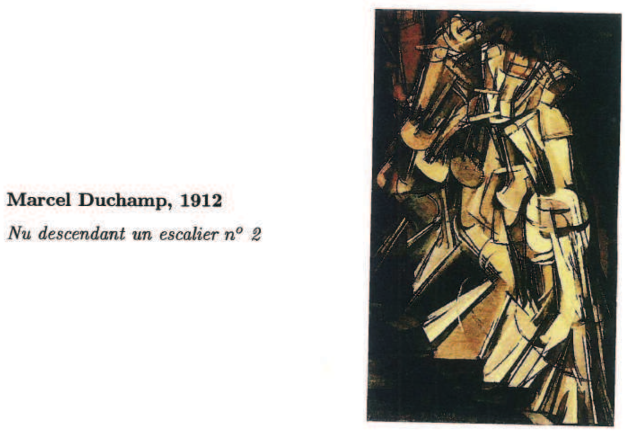

Рис. 6. Марсель Дюшан, 1912

тической модели наблюдений, пополненной теоретической моделью, включающей границы. У меня получалось так, что на границе прошлого была только точка и время нуль, на границе будущего может быть дивизор и время бесконечность. А потом что или до этого что? Моя дальнейшая аргументация будет аргументацией в пользу такой картины. Ясно, что в момент Большого взрыва или чего-нибудь в этом роде классическая картина, в общем, неприменима. Это некое усреднение квантовой картины. А в квантовой картине происходит очень интересная вещь. В квантовой картине время фигурирует именно с коэффициентом $\sqrt{-1}$. Вы знаете, что оператор эволюции в квантовой механике — это оператор e^{iHt}, где H — гамильтониан, и поэтому время там мнимое. Моё предложение состоит в том, чтобы поместить полупрямую космологического времени на комплексную прямую (даже, на самом деле, на комплексную проективную прямую), и объяснить вам, почему я думаю, что в момент времени 0, и по аналогии в момент времени ∞, время просто перескакивает с чисто вещественной полуоси на чисто мнимую полуось. А когда я доберусь до Mixmaster Universe, я скажу, что оно не перескакивает, а статистически переходит с одной на другую по геодезической. Геодезических много, на них есть хорошая, красивая, интересная мера, и время в соответствии с этой мерой превращается из мнимого в вещественное и наоборот. В нуле мнимое превращается в вещественное, в бесконечности вещественное превращается в мнимое, а когда мы склеиваем две такие модели, то соответственно склейка происходит очень естественным образом.

Когда мы рассматриваем картинку комплексной плоскости, да ещё, как мы потом увидим, ту статистику, которая нас не интересует, то оказывается, что очень естественно рассмотреть чисто математическую конструкцию. Комплексная полуплоскость, на которой действует, скажем, группа дробно-линейных целочисленных преобразований, параметризует эллиптические кривые вместе с фиксированным базисом одномерных когомологий. И если я объявляю, что время где-то гуляет по этой комплексной полуплоскости, то хорошо бы понять, есть ли какой-нибудь физический смысл у соответствующей эллиптической кривой. И я был совершенно счастлив, когда, читая классическую физическую литературу, я обнаружил, что в так называемой вселенной Фридмана–Робертсона–Уокера эллиптические кривые, причём параметризующие именно время, появляются сами собой, только физики, конечно, про них не знают. Пространство-время Робертсона–Уокера — это произведение космологического времени t по полуоси и ещё пространства постоянной кривизны (она может быть 1, -1 или 0). В момент времени t эта метрика перемасштабирована множителем $R(t)$. Динамика такой модели описывается одной вещественной функцией $R(t)$, которая возрастает от 0 до ∞. Если угодно, можно считать $R(t)$ другим космологическим временем. Тогда мы скалируем $R(t)$, положив $R = 1$ «сейчас». И тогда оказывается, что если вы наложите уравнения Эйнштейна–Фридмана на $R(t)$ с космологической константой 3 в данном случае, то возникает эллиптическая кривая $Y^2 = R^4 + aR + b$. У физиков она написана, в работе есть алгебро-геометрическое уравнение эллиптической кривой, но они не отождествляют уравнение с эллиптической кривой. И тогда, кроме собственного времени t, с которого мы начали, и кроме множителя $R(t)$, глобальное время можно мерить тем, что физики называют конформным временем $\tau = \int_0^{R(t)} \frac{dR}{Y}$; τ — это в точности интеграл от дифференциала первого рода от нулевой точки до $R(t)$.

Во вселенной Фридмана–Робертсона–Уокера временна́я эволюция описывается (во всяком случае тогда, когда время классическое, вещественное) вещественной кривой $Y^2 = R^4 + aR + b$, с двумя параметрами a и b, на алгебраическом пространстве. И если вообразить себе все комплексные решения и чуть-чуть отнормировать параметры, то у нас возникнет алгебраическая поверхность, и время тогда изображает кривую на этой поверхности.

Я напомню, что у нас имеется версальное (или универсальное) семейство эллиптических кривых, которые параметризованы верхней комплексной полуплоскостью H. Если ζ — точка на комплексной плоскости, то ей отвечает комплексный тор $E_\zeta = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\zeta)$ (комплексные числа по модулю решётки). Много разных точек отвечает изоморфным эллиптическим кривым, вы можете просто изменить базис когомологий. Это отвечает группе $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, т.е. дробно-линейным преобразованиям с целыми коэффициентами, с определителем 1, которые действуют следующим образом: $\zeta \mapsto \frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}$. Это действие на базе, и легко также определить действие на самих слоях. Факторы по таким подгруппам называются модулярными кривыми. Эти факторы имеют естественную структуру алгебраических кривых. Они параметризуют универсальные семейства, которые в некоем точном смысле изоморфны.

Я покажу, что идея времени, которое двигается вдоль такой кривой в верхней комплексной полуплоскости, позволяет также понять то, что называется хаотической эволюцией в перемешивающей вселенной, которая была придумана физиками. Повторю, что мой главный тезис состоит

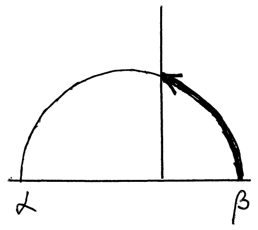

Рис. 7.

в том, что Mixmaster Universe должно быть рассматриваемо как приближение в статистической динамике к неизвестному квантово-полевому описанию Большого взрыва.

Я рассмотрю перемешивающую вселенную. Она несколько более общая, чем вселенная Робертсона–Уокера. Главным образом тем, что здесь у меня будет три независимых функции: a, b и c. Эти коэффициенты называются факторами скалирования (по каждой оси свой): $ds^2 = dt^2 - a(t)^2 dx^2 - b(t)^2 dy^2 - c(t)^2 dz^2$. Если написать уравнения Эйнштейна для такой метрики, то окажется, что у них есть чрезвычайно интересный класс точных решений. В этих точных решениях $a(t) = t^{p_1}$, $b(t) = t^{p_2}$ и $c(t) = t^{p_3}$, где $\sum p_i = \sum p_i^2 = 1$. Здесь три фактора и на них два уравнения. Эти метрики при $t = 0$ становятся сингулярными, и это — момент Большого взрыва.

Теперь на сцену выступает перемешивающая вселенная. Эту теорию разработали Белинский, Халатников и Лифшиц в 70-х годах. Они аргументировали, пользуясь физическими рассуждениями, что казнеровские решения, невзирая на то, что это очень частные решения, в некотором смысле слова описывают чрезвычайно типичное поведение такой вселенной около точки Большого взрыва, если мы будем к ней приближаться, а не от неё удаляться. Буквально следующим образом. «Типичное» (в кавычках — потому что сами физики определения типичности не дали) решение в этой модели, когда происходит обратная эволюция во времени, может быть описано последовательностью решений Казнера, т.е. какое-то время оно ведёт себя как одно решение, потом оно перескакивает на другое решение, потом на третье, а в промежутке какие-то статистические колебания. Когда за это взялись математики, они описали утверждение и аргументацию более точно следующими примерно словами. В пространстве этих последовательностей можно определить некую символическую динамику, оператор сдвига. Как мы увидим, она связана с введением непрерывных дробей, и даже непрерывных дробей, которые в обе стороны бесконечны. Символическая динамика такая: сдвиг в непрерывной дроби на единицу — налево или направо. Оказывается (это было известно ещё с начала 20 века), что формально та же самая символическая динамика как раз кодирует геодезические на верхней полуплоскости с иррациональными концами. Моя аргументация будет состоять в том, что совершенно формальное отождествление этих двух динамик на самом деле отражает картину физического времени, которое, если мы его пустим назад, то произойдёт то, что физики называют поворот Вика, т.е. переход с вещественной оси на мнимую, только он не скачком будет происходить, а будет моделироваться куском геодезической, изображённым на рис. 7. А так как геодезических много, то мы можем уследить только за статистическими свойствами. Статистические свойства и вся статистика будут ровно теми же самыми, что и в Mixmaster Universe.

Сейчас я чуть больше аксиоматических подробностей скажу о том, как именно кодировали Белинский, Халатников и Лифшиц эти эры, как объяснить дискретизованную картинку перескока от одной эры к другой в уравнении Эйнштейна. Они вводят ещё одно логарифмическое время, которое, на самом деле, очень родственно тому, которое я рассматривал раньше: $d\Omega := -\frac{dt}{abc}$; здесь t старое, a, b, c старые, а знак минус стоит потому, что мы хотим назад двигаться. Тогда Ω стремится к $+\infty$, в отличие от t, которое стремилось к $+0$. Типичное решение уравнения Эйнштейна описывает последовательность бесконечно возрастающих моментов логарифмического времени $\Omega_0 < \Omega_1 < \cdots < \Omega_n < \ldots$, а также последовательность иррациональных вещественных чисел $u_n \in (1, +\infty)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Полуинтервал $[\Omega_n, \Omega_{n+1})$ этого времени называется n-й эрой Казнера для данного решения. И внутри n-й эры эволюция a, b, c примерно описывается не одной, а несколькими последовательными формулами Казнера, т.е. числа p_1, p_2, p_3 внутри одной эры несколько раз меняются. Те интервалы, где и они не меняются, называются циклами Казнера. Значит, есть эры Казнера, и внутри каждой эры Казнера есть ещё циклы Казнера.

Эволюция в n-й эре Казнера начинается в момент Ω_n с некоторым значением $u = u_n > 1$. Оно

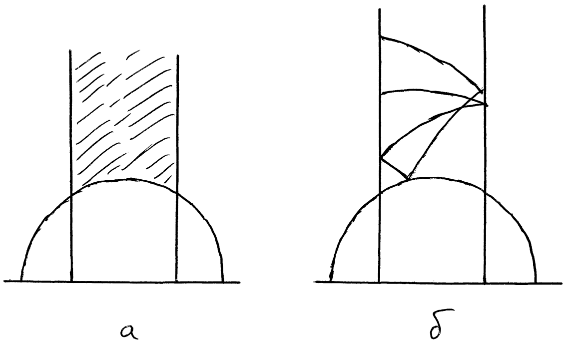

Рис. 8.

определяет p_1, p_2, p_3 в порядке возрастания простой точной формулой:

$$p_1 = \frac{u}{1+u+u^2}, \quad p_2 = \frac{1+u}{1+u+u^2}, \quad p_3 = \frac{u(1+u)}{1+u+u^2}.$$

Потом внутри той же эры, когда начинается следующий цикл, мы отнимаем от предыдущего значения u_n сначала единицу, потом двойку и т.д.: $u = u_n - 1$, $u_n - 2$, $\ldots$и соответствующим образом определяем a, b, c. И после того как целая часть двух циклов пройдёт в нашей эре, происходит перескок на следующую эру. При этом перескоке параметр u меняется следующим образом: $u_{n+1} = \frac{1}{u_n - [u_n]}$. Здесь вы уже, конечно, узнаете непрерывные дроби, если вы когда-нибудь ими занимались; в последней формуле вы их уже увидите.

Это означает, что если мы хотим кодировать естественным образом все u_n вместе, то мы должны рассмотреть иррациональное число $x > 1$ и его разложение в непрерывную дробь

$$x = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \ldots}} = [k_0, k_1, k_2, \ldots].$$

А временной поток тогда моделируется формулой

$$[k_0, k_1, k_2, \ldots] \mapsto [0, k_0, k_1, k_2, \ldots], \qquad x \mapsto \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right].$$

Мы просто сдвигаем непрерывную дробь направо. Мы положим $x_n = [k_n, k_{n+1}, \ldots]$.

При перескоке к следующей эре Ω меняется следующим образом:

$$\Omega_{n+1} = (1 + \delta_n k_n (u_n + 1/x_n))\Omega_n.$$

Ω и u могут быть независимыми; x завязывает одно на другое по этой формуле.

И если вы обе последовательности сразу хотите закодировать, то тогда надо ввести, как вы сейчас увидите, непрерывные дроби, которые в обе стороны тянутся. И это очень хорошо, потому что у геодезической два конца. Грубо говоря, пока я только одну непрерывную дробь рассматриваю, я рассматриваю непрерывную дробь для одного конца, а когда я введу вторую непрерывную дробь для другого конца, то они вместе естественным образом объединяются в бесконечную в обе стороны непрерывную дробь. А какие поставить слева, и какие справа, зависит от того, какое движение мы рассматриваем. Если по направлению к нулю, или по направлению от вещественной части к мнимой, тогда движение будет против часовой стрелки; если наоборот, тогда мы просто перевернём.

Чудным образом то же самое преобразование описывает подходящее отображение Пуанкаре для геодезического потока на модулярной поверхности, которое получается проекцией всех этих геодезических на модулярную поверхность. Простейшая алгебраическая модулярная поверхность выглядит так, как показано на рис. 8, а (нам нужно взять фундаментальную область относительно действия группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, если мы хотим каждую эллиптическую кривую представить одним

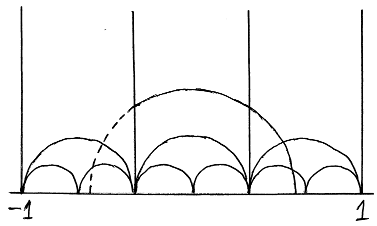

Рис. 9.

способом). Тогда то, что на рис. 7 плавно едет от одной точки к другой, здесь будет чем-то вроде бильярда: кривая будет отражаться, возвращаться и т.д. (рис. 8, б). Статистика движений и возвращений оказывается описываемой ровно теми же самыми формулами, и есть очень много математических работ, где всё это изучается совершенно безотносительно к статистике Белинского, Халатникова и Лифшица.

Само утверждение Белинского, Халатникова и Лифшица было сделано более точным (я не могу сказать совсем точным или нет — я сам ещё не разобрался) в работах, в которых, в частности, участвовали математики — Богоявленский и Новиков. У Богоявленского есть целая книжка, где он очень подробно об этом пишет. И это очень полезная книжка для этого сюжета, потому что он там объясняет, как вообще изучать плохо ведущие себя при приближении к каким-то режимам решения дифференциальных уравнений, вводя надлежащую границу, изучая на этой границе сепаратрисы и всякое прочее, и описывая в терминах этих сепаратрис приближённое асимптотическое поведение. Можно сказать так: когда, скажем, Белинский, Халатников и Лифшиц говорят о типичном решении вне, они на самом деле говорят о типичном решении на подходящей границе. Про это математик может сказать, что это действительно там типично. А в каком смысле это типично до границы, это, вероятно, нужно просто принять за определение.

Модулярную поверхность можно выбирать двумя способами: верхняя полуплоскость либо по модулю всей группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, либо по модулю так называемой подгруппы $\Gamma_0(2)$ — матрицы, у которых левый нижний угол чётный. При кодировании геодезического потока на модулярной поверхности, если мы хотим кодировать только эры, то берём группу $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$, а если хотим кодировать ещё и циклы Казнера, то берём $\Gamma_0(2)$.

Как я уже объяснял, кодирование геодезических, пересекающих мнимую полуось, двойной непрерывной дробью

$$[\dots, k_{-2}, k_{-1}, k_0, k_1, k_2, \dots]$$

делается так. Этой непрерывной дроби сопоставляется геодезическая с концами $z_- \in (-1,0)$ и $z_+ \in (1,+\infty)$, где

$$z_- = \frac{1}{[k_0, k_{-1}, k_{-2}, \dots]}, \qquad z_+ = [k_0, k_1, k_2, \dots].$$

А соответствующее сечение Пуанкаре более или менее определяется тем, что мы берём мнимую полуось и проектируем её на модулярную поверхность, а потом смотрим, как она пересекается с геодезическими.

На рис. 9 на самом верху изображены треугольники с вершиной в бесконечности, потом треугольники с вершинами в трёх точках на вещественной оси. Это так называемые треугольники Фарея. Они соединяют соседние рациональные числа в ряду Фарея. Если у вас есть рациональные числа $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, то между ними есть рациональное число $\frac{a+c}{b+d}$. И как раз такие три точки определяют треугольник Фарея, если между ними запустить геодезические в верхней комплексной полуплоскости. Кодирование такой геодезической происходит очень просто. Можно выбрать один треугольник, скажем, с вершинами 0, 1 и ∞. Потом так можно перенумеровать вершины у любого треугольника. Одна его вершина будет считаться нулём, другая единицей, а третья бесконечностью: они пришли из соответствующего элемента модулярной группы. И потом, когда геодезическая идёт по соответствующему треугольнику, вы пишете L, если его вершина ∞ находится слева. Когда вы попадаете в следующий треугольник, там ∞ может оказаться справа; тогда вы пишете R. Потом вы попадаете в следующий треугольник и т.д. В результате возникает бесконечная в обе стороны последовательность $\dots R^{k_0} L^{k_1} R^{k_2} \dots$ Последовательность этих степеней как раз и будет кодом соответствующей геодезической.

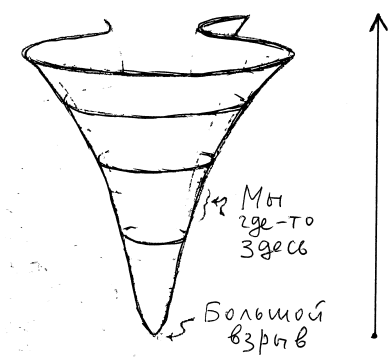

Рис. 10.

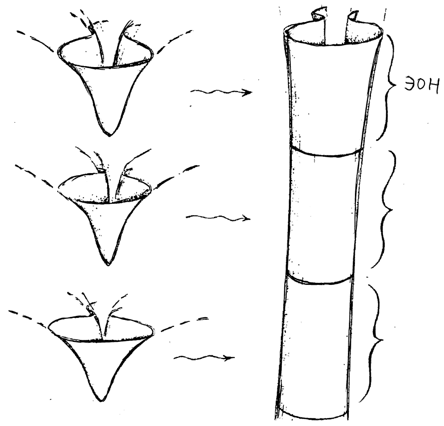

Рис. 11.

Повторяю, что эта картинка была известна и разрабатывалась совершенно независимо от Белинского, Халатникова и Лифшица. Но они чудесным образом совпадают. И к этому моменту моё эвристическое предложение состоит в том, что они должны совпадать потому, что если вы вернётесь к галактическому времени, которое я приводил не на примере Mixmaster Universe, а на примере вселенной Фридмана–Робертсона–Уокера, (его можно ввести и здесь, это не проблема), то тогда это будет связано с тем, что в нулевой момент времени оно переходит с вещественной полуоси на чисто мнимую, но переходит статистически, по какой-нибудь из геодезических. И это описание является классическим приближением к неизвестному нам квантовому описанию момента Большого взрыва.

На самом деле мы должны говорить не о верхней полуплоскости, а о правой полуплоскости, если мы хотим буквально связывать эту картину с физикой. Произвол этого выбора такой же, как произвол выбора в метрике Минковского между сигнатурой (1,3) и (3,1). Что мы хотим: чтобы расстояние от одной точки до другой было вещественное или, наоборот, чтобы время от одной точки до другой было вещественное.

Теперь я хочу сказать два слова о той картинке Пенроуза, которая описана в его недавней монографии, а до этого была описана в нескольких статьях. При этом я возвращаюсь к тому, что я описывал с самого начала: если мы присоединяем границу одного типа в начале, в момент Большого взрыва, и границу другого типа в конце, в момент охлаждения плоской вселенной, то этой картиной можно воспользоваться для того, чтобы предоставить математическую модель пенроузовской конформной циклической космологии.

Эти картинки (рис. 10 и рис. 11) я скопировал из его книги. Его картинка расширяющейся вселенной — это просто схематическое изображение того, что я иллюстрировал на рис. 1, но, конечно, и та и другая картинки являются чистой фантазией. На рис. 10 космологическое время расположено по вертикали снизу вверх, а не по горизонтали слева направо, как у нас было раньше. Его идея состояла в том, что если применить немножко другой математический механизм, не тот, который я вам объяснял, а так называемое конформное рескалирование, то нужно будет склеить конец одной вселенной (как он называет *эон*) с началом другой (рис. 11). А именно, он говорит, что мы будем рассматривать только метрику (он не рассматривает ни геометрии, ни топологии объемлющего пространства), и он говорит, что когда мы идём назад по времени к моменту Большого взрыва, пространство становится всё меньше и меньше. Давайте мы сделаем тогда скалирование метрики: будем умножать её на уходящий в бесконечность фактор, так что нам будет казаться, что вселенная не уменьшается. И наоборот, когда мы будем подходить к этому моменту с предыдущей стороны, с пологого конца предыдущего эона, где вселенная расширяется до бесконечности, давайте тогда будем её метрику умножать на фактор, который стремится к нулю, и поэтому нам будет казаться, что она на самом деле сжимается. Оказывается, что соединение этих двух конформных классов метрик на границе (которое он в явном виде не вводит, но оно более или менее понятно) можно представить как некую склейку, и тогда историю вселенной можно вообразить себе как историю таких последовательных переходов от одного эона к другому. Тогда на границе перехода время становится мнимым, а описание квантовым, а потом опять принимает приближённо классический вид.

В самом начале я упоминал, что основы нынешней космологической картины были заложены Хабблом и Леметром. И даже Леметр, кажется, хронологически раньше, чем Хаббл. Леметр был кардиналом, священником, и Папа, при котором он был, очень хотел объявить, что таким образом открыт момент творения и что это — большой прорыв для церкви, для связи науки с религией. И Леметр связался тогда с директором ватиканской обсерватории, научным советником Папы, и попросил его, чтобы они вместе постарались уговорить Папу не высказываться по поводу космологии вообще. И Папа был послушным и согласился, что он больше не будет в своих речах говорить о космологии. Леметр очень тщательно старался, чтобы его параллельные карьеры в космологии и в теологии не пересекались, полагая, что одна из них ведёт его к лучшему пониманию материального мира, а другая к лучшему пониманию духовного.

Ещё я нашёл прелестный абзац в книге Стивена Вайнберга «Первые три минуты». Но потом узнали, что Вайнберг не знал самого существенного, что произошло в первые три минуты: он не знал инфляции; тогда теории инфляции ещё не было. В последнем абзаце он пишет то, что мне очень нравится: «Если нет никакого утешения в плодах наших исследований, то некоторое утешение есть в самом исследовании. Мужчины и женщины не удовлетворяются тем, чтобы утешать себя рассказами о богах и гигантах, или размышлять исключительно о повседневных делах жизни. Они также строят телескопы, спутники, ускорители, сидят за столами бесконечные часы, осмысляя значение данных, которые они собрали. Попытка понять Вселенную — это одно из очень немногих занятий, которое поднимает человеческую жизнь хотя бы немного над уровнем фарса и придаёт ей некое благородство трагедии.»