5. РАССЛОЕНИЕ ХОПФА.

Пусть $S^3 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ — трехмерная сфера, а $\mathbb{C}P^1$ — комплексная проективная прямая. Отображение $p : S^3 \to \mathbb{C}P^1$, заданное формулой $p(z,w) = [z : w]$, называется расслоением Хопфа.

Задача 1. а) Докажите, что прообраз $p^{-1}(a) \subset S^3$ произвольной точки $a \in \mathbb{C}P^1$ гомеоморфен окружности. б) Докажите, что расслоение Хопфа — действительно расслоение со слоем окружность, т.е. для каждой точки $a \in \mathbb{C}P^1$ существует окрестность $U \subset \mathbb{C}P^1$ и тривиализация $\lambda : p^{-1}(U) \to S^1 = \{\xi \in \mathbb{C} \mid |\xi| = 1\}$ такая, что $\lambda \times p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \to U \times S^1$ — гомеоморфизм.

Задача 2. Пусть $\alpha > 0$. а) Докажите, что множества $A_\alpha = \{[z : w] \in \mathbb{C}P^1 \mid |w/z| \le \alpha\}$ и $B_\alpha = \{[z : w] \in \mathbb{C}P^1 \mid |w/z| \ge \alpha\}$ гомеоморфны кругам (с общей границей $C_\alpha = \{[z : w] \in \mathbb{C}P^1 \mid |w/z| = \alpha\}$). Выведите отсюда, что $\mathbb{C}P^1$ гомеоморфно двумерной сфере S^2. б) Докажите, что прообразы $p^{-1}(A_\alpha)$ и $p^{-1}(B_\alpha)$ гомеоморфны полноториям, а прообраз $p^{-1}(C_\alpha)$ — двумерному тору.

Задача 3. а) Докажите, что множество $D = \{(z,w) \in S^3 \mid w \in [0,1]\}$ гомеоморфно кругу, причем границе круга при гомеоморфизме соответствует слой расслоения Хопфа $p^{-1}([1 : 0]) \subset S^3$. б) Докажите, что для всякого $a \ne [1 : 0]$ слой $p^{-1}(a)$ пересекает D ровно в одной точке.

Группа SU(2) состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, где $|a|^2 + |b^2| = 1$. Стандартное действие SU(2) на $\mathbb{C}^2$ переводит множество $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ в себя; таким образом, SU(2) действует гомеоморфизмами на S^3.

Задача 4. а) Докажите, что действие SU(2) на S^3 проецируется на базу расслоения Хопфа. Иными словами, существует действие q группы SU(2) на $\mathbb{C}P^1$ такое, что $p \circ X = q(X) \circ p$ для каждого $X \in \mathrm{SU}(2)$. б) Докажите, что действие q транзитивно на точках: для любых $u, v \in \mathbb{C}P^1$ найдется $X \in \mathrm{SU}(2)$ такое, что $q(X)(u) = v$. в) Выведите из результатов задач 4б и 3б, что любые два различных слоя расслоения Хопфа зацеплены с коэффициентом зацепления 1: для любого $u \in \mathbb{C}P^1$ существует подмножество $D_u \subset S^3$, гомеоморфное кругу и такое, что $p^{-1}(u)$ переходит при гомеоморфизме в границу круга, а $p^{-1}(v)$ пересекает D_u ровно в одной точке.

Задача 5. Зафиксируем число $n \in \mathbb{Z}$ и рассмотрим действие группы $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ на S^3, заданное формулой $\lambda(z,w) = (\lambda z, \lambda^n w)$. Докажите, что а) каждая орбита действия гомеоморфна окружности; б) пространство орбит Ω гомеоморфно $\mathbb{C}P^1$ (т.е. двумерной сфере); в) отображение $p : S^3 \to \Omega$, переводящее каждую точку $(z,w) \in S^3$ в ее орбиту, не является расслоением, если $n \ne \pm 1$. При $n = 1$ это расслоение Хопфа, а при $n = -1$?

Пусть E — множество пар векторов (v_1, v_2), где $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ имеют единичную длину и ортогональны друг другу: $(v_i, v_j) = \delta_{ij}$. Обозначим S^2 единичную сферу в $\mathbb{R}^3$ с центром в начале координат. Отображение $p : E \to S^2$ действует по формуле $p(v_1, v_2) = v_1$.

Задача 6. а) Докажите, что $p : E \to S^2$ — расслоение со слоем окружность. б) Пусть $A \subset S^2$ — верхнее полушарие, $B \subset S^2$ – нижнее, а $C \subset S^2$ — экватор. Докажите, что $p^{-1}(A) \subset E$ и $p^{-1}(B) \subset E$ гомеоморфны полноториям, а $p^{-1}(C) \subset E$ — двумерному тору. в) Докажите, что слой $p^{-1}(v) \subset E$ для произвольного $v \in S^2$ не стягиваем в E.