

Отчет по гранту конкурса
"Молодая математика России"
2022 год
Каплун А.В.

1 Результаты, полученные в этом году

В 2022 году проводилось дальнейшее изучение структуры алгебры эйконалов \mathfrak{E} метрического графа Ω . Напомним, что эйконалы E_γ^T – самосопряженные операторы, определяемые динамической системой, описывающей распространение волн по метрическому графу.

Работа [1] посвящена подробному описанию приведения алгебры эйконалов к т.н. канонической форме (точнее, одной из двух – алгебраической). Основной результат формулируется в следующей теореме:

Теорема 1. *Существует изометрия U , доставляющая алгебре \mathfrak{E}_Σ^T и ее образующим-эйконалам представление*

$$U\mathfrak{E}_\Sigma^T = \bigoplus_{l=1}^{\mathcal{L}} C([0, \zeta_l]; \mathbb{M}^{n_l}); \quad UE_\gamma^T = \bigoplus_{l=1}^{\mathcal{L}} \left[\sum_{k=1}^{s_{\gamma l}} \tilde{\tau}_{\gamma l}^k \tilde{P}_{\gamma l}^k \right], \quad \gamma \in \Sigma. \quad (1)$$

В нем $\tilde{\tau}_{\gamma l}^k$ - линейные функции от $r_l \in [0, \zeta_l]$, такие, что $\left| \frac{d\tilde{\tau}_{\gamma l}^k}{dr_l} \right| = 1$, а их области значений суть сегменты длины ζ_l , которые могут иметь разве что общие концы. $\tilde{P}_{\gamma l}^k \in \mathbb{M}^{n_l}$ суть проекторы, попарно ортогональные для каждого γ и такие, что выполнено $\vee \{ \tilde{P}_{\gamma l}^k \mid k = 1, \dots, s_{\gamma l}; \gamma \in \Sigma \} = \mathbb{M}^{n_l}$.

С помощью этого результата была описана структура спектра алгебры эйконалов для произвольного метрического графа.

Работа [2] посвящена обобщению и упрощению изложения полученных ранее результатов, а также описанию связи структуры спектра алгебры

\mathfrak{E} с геометрией графа. Определяются *фреймы* (геометрический и алгебраический) \mathfrak{F}_Σ^g и \mathfrak{F}_Σ^a , являющиеся фактор-пространствами области графа и спектра алгебры эйконалов соответственно. Топологически каждый из фреймов является хаусдорфовым пространством, гомеоморфным некоторому графу. На фреймах заводятся естественные координаты, определяющие метрику.

Описывается некоторый класс графов (т.н. *ординарные графы*), для которых оказывается справедливой теорема:

Теорема 2. Пусть область $\Omega^T[\Sigma]$ является ординарным графом. Тогда соответствие между фреймами $\mathfrak{F}_\Sigma^a \ni \pi \leftrightarrow \lambda \in \mathfrak{F}_\Sigma^g$, задаваемое условием

$$\sigma_\gamma(\pi) = \sigma_\gamma(\lambda), \quad \gamma \in \Sigma \quad (2)$$

оказывается изометрией фреймов (как метрических пространств).

При этом, алгебра эйконалов \mathfrak{E} допускает реализацию в виде алгебры полунепрерывных сечений C^* -расслоений с базой \mathfrak{F}_Σ^g или \mathfrak{F}_Σ^a .

По результатам исследований алгебры эйконалов метрического графа в сентябре 2022 года успешно защищена кандидатская диссертация в диссертационном совете Д 002.202.01.

2 Конференции и школы

- Международная конференция "Days on Diffraction 2022", 30 мая – 3 июня 2022, Санкт-Петербург
- Международная конференция "QIPR 2022", 22 – 26 августа 2022, Сочи
- "QGraph Network Meeting", 8 – 9 декабря 2022, Stockholm
- выступления на семинаре В.М. Бабича по дифракции и распространению волн (ПОМИ РАН) и семинаре "Алгебры в анализе" (МГУ)

3 Опубликованные и поданные в печать работы

- M. I. Belishev, A. V. Kaplun, “Canonical representation of C^* -algebra of eikonals related to the metric graph”, *IZV MATH*, 2022, 86, doi: 10.1070/IM9179 (на русском: doi: 10.4213/im9179)
- M. I. Belishev, A. V. Kaplun, “Canonical forms of metric graph eikonal algebra and graph geometry”, arXiv: 2210.13246

4 Работа в научных центрах и международных группах

Работал в рамках конкурса поддержки аспирантов в Санкт-Петербургском международном математическом институте им. Леонарда Эйлера.

Список литературы

- [1] М. И. Белишев, А. В. Каплун.
Каноническое представление C^* -алгебры эйконалов метрического графа
Изв. РАН. Сер. матем., т. 86, вып. 4 (2022), 3-50.
- [2] M. I. Belishev, A. V. Kaplun
Canonical forms of metric graph eikonal algebra and graph geometry
arXiv: 2210.13246 (2022)