Наглядная геометрия и топология

Михаил Скопенков

http://skopenkov.ru/courses/geometry-16.html

Этот курс адресован тем, кто хочет *уже в процессе изучения* геометрии и топологии получить представление о том, где и как применять полученные знания.

Для каждой изучаемой теории, каждого нового понятия мы постараемся показать, как они *естественно возникают* при решении практических задач, к каким задачам применяются дальше. Благодаря этому большинство объектов становятся наглядными.

Материал будет изучаться в виде решения задач участниками, с подробными указаниями и последующим разбором на занятии. Первые занятия доступны школьникам.

Примерная программа.

1. *Проективная геометрия* изучает свойства *проекции*. Возникла из учения художников о *перспективе*. Это базовый инструмент изучения множеств, заданных алгебраическими уравнениями. А значит, применяется почти во всех разделах математики.

1a. *Аффинная геометрия.* Параллельная проекция на плоскости и в пространстве. Решение геометрических задач с помощью параллельной проекции. Простое отношение — то, что сохраняется при параллельной проекции прямой. Линейные преобразования прямой и плоскости — композиции параллельных проекций.

1b. *Проективная геометрия.* Центральная проекция на плоскости и в пространстве. Решение геометрических задач с помощью центральной проекции. Теоремы Паппа, Паскаля, Брианшона и Дезарга. Двойное отношение — то, что сохраняется при центральной проекции прямой. Гармонические четверки. Дробно-линейные преобразования вещественной прямой — композиции центральных проекций. Проективная прямая, проективная плоскость, проективные преобразования — способ сделать проекцию взаимнооднозначной. Основная теорема проективной геометрии (Мебиуса–фон Штаудта)*.

2. *Неевклидова геометрия* — геометрия с необычными свойствами параллельных линий. Возникла из попыток доказать *постулат Евклида о параллельных* и при изучении гладких поверхностей. Это основа для теории относительности.

2a. *Сферическая геометрия.* Сферические прямые, углы и треугольники. Сумма углов треугольника. Скалярное и векторное произведения для решения задач на сфере.

2b. *Геометрия Лобачевского.* Сравнение аксиом геометрий Евклида и Лобачевского. Элементарные теоремы геометрии Лобачевского. Сумма углов треугольника. Идеальные треугольники. Окружности, орициклы и эквидистанты. Длина окружности. Модель Кэли-Клейна. Поверхность Бельтрами.

E-mail address: skopenkov@rambler.ru

2c*. *Другие геометрии.* Геометрия и кинематика Галилея. Парабола как окружность в геометрии Галилея. Геометрия Минковского и кинематика теории относительсти. Пространство скоростей в теории относительсти и геометрия Лобачевского.

3. *Топология* изучает свойства *непрерывности.* Возникла, в частности, в процессе решении задачи о раскрасках карт на плоскости. Применяется во всех разделах математики и в других естественных науках.

3а. *Графы на поверхностях.* Раскраска карт на поверхностях. Формула Эйлера и неравенство Эйлера. Обзор наглядных применений: микросхемы, дорожные развязки, итд.

Литература

1. Д. Гильберт, С. Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. ОНТИ НКТП СССР, 1936.
2. В. В. Прасолов. Наглядная топология. М.: МЦНМО, 1995, 112 с.
3. И.М. Яглом. Геометрические преобразования. (Серия "Библиотека математического кружка", вып. 8) Т. 2. - М.: ГИТТЛ, 1956. - 612 с.
4. В.В. Прасолов. Геометрия Лобачевского. - 2-е изд., испр. и доп. -М.: МЦНМО, 2000. - 80 с.

Содержание

Возможное продолжение.

1. Многомерная геометрия. Многомерные проективные пространства. Геометрия n-мерной сферы. Стереографическая проекция. Проективная модель n-мерной геометрии Мебиуса. Описание вращений и круговых преобразований 4-мерного пространства с помощью кватернионов. Геометрия Лобачевского n измерений. Модель Кэли-Клейна. Модель Пуанкаре. Изоморфизм моделей (отображение Дарбу). Геометрия Минковского 4 измерений и кинематика теории относительсти.

2. Геометрия многогранников. Правильные многогранники. Группы, порожденные отражениями. Выпуклые многогранники. Грани и опорные функции. Теорема Радона. Теорема Каратеодори. Эйлерова характеристика. Равновеликость и равносоставленность. Теоремы Бойяи–Гервина и Дена. Инвариант Дена. Смешанные объемы*. Линейные теоремы Ван Кампена-Флореса и Конвея-Гордона-Закса*.

3. Геометрия решеток. Классификация подрешеток. Индекс. Порядки. Теорема о кляксе Минковского. Применения в теории чисел. Теорема Пика. Многочлен Экхарта.* Теорема о 12 целых точках*.

---

1. Аффинная геометрия прямой и плоскости

Пусть l_1 и l_2 — две прямые на плоскости, l — прямая, не параллельная ни одной из них. *Параллельным проектированием* прямой l_1 на прямую l_2 относительно направления l называют отображение, которое точке A прямой l_1 ставит в соответствие точку пересечения прямой l_A, параллельной l и проходящей через A, с прямой l_2.

1.1. Любое ли параллельное проектирование прямой на прямую сохраняет длины отрезков?

Простым отношением упорядоченной тройки точек A, B, C на прямой ($B \neq C$) называется такое число x, что $\overrightarrow{AC} = x \cdot \overrightarrow{BC}$.

1.2. a) Простое отношение упорядоченной тройки точек на прямой равно x. Найдите простые отношения этих точек, записанных во всех других порядках.
b) Простое отношение упорядоченной тройки точек на прямой сохраняется при параллельном проектировании.

1.3. a) Композицией нескольких параллельных проектирований прямой можно перевести любые две различные точки в любые другие две различные точки.
b) Верно ли аналогичное утверждение для двух троек точек на прямой?
c) Дайте определение параллельного проектирования одной плоскости в пространстве на другую.
d) Композицией нескольких параллельных проектирований плоскости можно перевести любой треугольник в любой другой.
e) Верно ли аналогичное утверждение для двух четырехугольников?

1.4. a) Каждая сторона треугольника поделена на три равные части, и точки деления соединены с противоположными вершинами. Докажите, что диагонали "внутреннего" 6-угольника пересекаются в одной точке.
b) В каком отношении делит основания трапеции прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей и точку пересечения продолжений боковых сторон?
c) Даны две параллельные прямые и точки A, B на одной из них. Постройте одной линейкой середину отрезка AB.

1.5. Пусть непрерывная биекция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ середину любого отрезка переводит в середину его образа, а точки 0 и 1 оставляет на месте. Тогда для всех $x, y \in \mathbb{R}$ и $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$,
a) $f(2x) = 2f(x)$; b) $f(x+y) = f(x) + f(y)$; c) $f(m/n) = m/n$; d) $f(x) = x$.

Задача Дня. *Основная теорема аффинной геометрии (Мёбиус–фон Штаудт).* Любое непрерывное взаимно-однозначное отображение плоскости, переводящее прямые в прямые, является композицией параллельных проектирований.

---

2. Проективная геометрия прямой и плоскости

2.1. Любое ли центральное проектирование прямой на прямую сохраняет простое отношение троек точек?

Двойным отношением четырех точек A, B, C и D на прямой ($A \neq D$, $B \neq C$) называется выражение $(A, B, C, D) := (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})/(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC})$. Четверка точек A, B, C и D с условием $(A, B, C, D) = -1$ называется *гармонической*.

2.2. a) Пусть $(A, B, C, D) = x$. Найдите двойные отношения точек A, B, C, D, записанных во всех других порядках.
b) Если какие-то два числа из (A, B, C, D), (C, D, A, B), (B, A, C, D), (A, B, D, C) равны, то $(A, B, C, D) = \pm 1$.
c) Точки A, O, C, B, D лежат на прямой в указанном порядке. Известно, что $AO = OB$ и $OA \cdot OB = OC \cdot OD$. Найдите (A, B, C, D).
d) Двойное отношение сохраняется при центральном проектировании.
e) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ прямые AB и CD пересекаются в точке G, AD и BC — в точке E. Прямые DB и EG пересекаются в точке H, AC и EG — в F. Найдите (E, G, F, H).

2.3. a) Композицией нескольких центральных проектирований прямой можно перевести любые три различные точки в любые другие три различные точки.
b) Верно ли аналогичное утверждение для четырех точек?
c) При помощи одной линейки невозможно построить середину данного отрезка.
d) Центральным проектированием плоскости можно перевести любой выпуклый четырехугольник в параллелограмм.

2.4. a) Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, а E, F — точки пересечения прямых AB и CD, BC и AD. Прямая EO пересекает стороны AD и BC в точках M и N, прямая FO пересекает стороны AB и CD в точках P и Q. Тогда прямые PN, MQ и EF пересекаются в одной точке.
b) *Теорема Паппа.* Точки C и C' лежат на прямых AB и $A'B'$, соответственно. Тогда три точки пересечения прямых AB' и $A'B$, BC' и $B'C$, CA' и $C'A$ лежат на одной прямой.
c) *Теорема Дезарга.* Прямые a, b, c пересекаются в одной точке O. В треугольниках $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ вершины A_1 и A_2 лежат на прямой a, B_1 и B_2 — на прямой b, C_1 и C_2 — на прямой c. A, B, C — точки пересечения прямых B_1C_1 и B_2C_2, A_1C_1 и A_2C_2, A_1B_1 и A_2B_2 соответственно. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

2.5. Пусть биекция f проективной прямой переводит любую гармоническую четверку точек в гармоническую и оставляет на месте точки 0, 1, ∞. Тогда для всех $x, y \in \mathbb{R}$
a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$; b) $f(xy) = f(x)f(y)$; c) $f(x) = x$.

Задача Дня. *Основная теорема проективной геометрии (Мёбиус–фон Штаудт)* Любое взаимно-однозначное отображение вещественной проективной плоскости, переводящее прямые в прямые, является композицией нескольких центральных проектирований.

---

3. Проективная геометрия коник

3.1. Любая ли центральная проекция плоскости переводит окружность в окружность?

Коника — это образ окружности при композиции центральных проекций. После решения задач этого листка предлагается обобщить их на коники (кроме 3.2dh, 3.5).

Двойное отношение точек A, B, C, D окружности —это величина $(A, B, C, D) := (XA, XB, XC, XD)$, где X — некоторая точка окружности, отличная от A, B, C и D.

3.2. a) Двойное отношение (A, B, C, D) не зависит от выбора точки X на окружности.
b) Проекция окружности из любой ее точки на прямую сохраняет двойные отношения.
c) $(A, B, C, D) = (AD, BD, CD, d)$, где d — касательная к окружности в точке D.
d) Выразите (A, B, C, D) через длины отрезков AC, BD, AD, и BC.
e) Касательные к окружности в точках A и B пересекаются на CD. Найдите (A, B, C, D).
f) С помощью одной линейки проведите касательную к окружности из точки вне нее.
g) Если X не лежит на окружности, то $(A, B, C, D) \neq (XA, XB, XC, XD)$.
h) Через любые 5 точек плоскости, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой, можно провести конику.

3.3. Центральным проектированием можно перевести данную окружность в окружность, а данную точку внутри нее — в центр образа.

3.4. a) *Теорема Ньютона.* Прямые, соединяющие противоположные точки касания описанного четырехугольника, проходят через точку пересечения диагоналей.
b) *Теорема Брианшона.* Если шестиугольник $ABCDEF$ описанный, то AD, BE и CF пересекаются в одной точке.
c) *Теорема Паскаля.* Точки пересечения противоположных сторон вписанного шестиугольника лежат на одной прямой (если они существуют).

3.5. Даны две различные точки A и A' на плоскости. Каждой прямой l, проходящей через A, поставили в соответствие некоторую прямую l', проходящую через A'. Тогда следующие условия эквивалентны:

- точки вида $l \cap l'$ лежат на одной конике, проходящей через A и A', или прямой;
- при нашем соответствии сохраняется двойное отношение.

Задача Дня. *Построение Кипера.* На сторонах неравнобедренного треугольника ABC, как на основаниях, во внешнюю сторону построены подобные равнобедренные треугольники ABC', BCA', CAB'. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке K, и найдите геометрическое место точек K для данного треугольника ABC.

---

4. Геометрия Мёбиуса

4.1. a) Найдите пересечение всех окружностей и прямых, проходящих через данную точку и перпендикулярных данной окружности.
b) Через любую точку, не лежащую на двух данных окружностях, можно провести окружность или прямую, перпендикулярную им обоим.

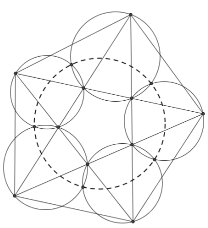
4.2. a) Инверсией можно перевести пару пересекающихся окружностей в пару прямых.
b) Инверсией можно перевести любую пару непересекающихся окружностей в пару окружностей с общим центром.

4.3. a) *Поризм Штейнера.* Если существует цепочка различных окружностей $S_1, S_2, \dots,$ S_n, каждая из которых касается двух соседних (S_n касается S_{n-1} и S_1) и двух данных непересекающихся окружностей R_1 и R_2, то таких цепочек бесконечно много. А именно, для любой окружности T_1, касающейся R_1 и R_2 (одинаковым образом, если R_1 и R_2 не лежат одна в другой, внешним и внутренним в противоположном случае), существует аналогичная цепочка из n касающихся окружностей $T_1, T_2, \dots, T_n$.
b) *Теорема Микеля о 6 окружностях.* Даны окружности S_1, S_2, S_3, S_4. Пусть S_1 и S_2 пересекаются в точках A_1 и A_2, S_2 и S_3 - в точках B_1 и B_2, S_3 и S_4 — в точках C_1 и C_2, S_4 и S_1 — в точках D_1 и D_2. Тогда если точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на одной окружности (или прямой), то и точки A_2, B_2, C_2, D_2 лежат на одной окружности (или прямой).
c) *Точка Микеля.* Четыре пересекающиеся прямые образуют четыре треугольника. Тогда четыре окружности, описанные около этих треугольников, имеют одну общую точку.

4.4. *Теорема Мебиуса.* Любая биекция сферы, переводящая окружности в окружности, является композицией инверсий.

4.5. Является ли образ эллипса при инверсии (с центром, не лежащим на самом эллипсе) множеством нулей некоторого многочлена от двух переменных?

Задача Дня. *Теорема Клиффорда о (5) окружностях.* Стороны выпуклого пятиугольника продолжили так, что образовалась пятиконечная звезда. Около треугольников – лучей звезды описали окружности. Тогда пять последовательных точек пересечения этих окружностей, отличных от вершин пятиугольника, лежат на одной окружности (или прямой).



Сданные решения

Абрамов 1.1ab, 2.12abd	Акимова 1.12ab4a, 2.1	Буря: 1.1ab2a3b4a, 2.2acd	Гацолаева 1.2a
Герасимова 1.1ab2	Гринько 1.1ab23c4ab	Дмитриенко 1.13a+4a, 2.12ab	Думанский **ЗД I**
Елишев 1.1ab2a3c4c, 2.1	Елшин 1.1ab3c	Ерошенко 1.1–1.4	Жукова 1.1a$\frac{\pm}{2}$b±
Замятин 1.1ab23a4bc	Измаилов 1abc±2a34abc±	Ильин 1.12b3ab, 2.12ab	Карпушкин 1.1abc+.3c
Кельвич 1.1	Киселёв 1.1ab234a5ab	Коваленко 1.2b	Королев 1.1ab
Краснов 1.1ab2a4c	Кравцов 1.2a	Круль 1.12ab34a, 2.12a–e	Лагуновская 1b
Литвинов 1.1a⇒b2a	Лященко 1.1ab, 2.12a–c	Малахов 1.1ab3c, 2.12abd	Маслов 1.1ab2, 2.1
Матушкин 1.12a4, 2.2a–e34	Мещихин 1.2a3c	Михайлов 1.1ab2a±b∓3b4b∓,2.12ab	Неугодов 1.1ab3c4a
Никитин 1.1ab	Новак 1.1a⇒b	Райко 1.1ab2ab34a, 2.12a–d34a	Сангаджиев (?) 1.1ab
Сеилов 1.1c	Федоров 1.4c	Халайджи Саша 1.1a2b	Халайджи Леша 1.2b
Хачатурян 1.1ab	Худяков 1.1ab	Шайдуров 1.12a3ac±	
Шарипова 1.124ab,2.12a–e34a	Шевцов 1.2a±b3a±c±	Шуклин 1.1ab2a	

5. Геометрия комплексных чисел и кватернионов

5.1. Комплексным числам a и b соответствуют векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Выразите скалярное произведение $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ через a и b с помощью сложения, умножения и сопряжения.

5.2. a) Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, если и только если диагонали четырехугольника перпендикулярны.
b) *Теорема Наполеона.* Если на сторонах произвольного треугольника, как на основаниях, построить во внешнюю сторону правильные треугольники, то их центры образуют правильный треугольник.

5.3. a) Композиция поворотов плоскости — поворот или параллельный перенос.
b) Композиция поворотов пространства (с различными осями) — винтовое движение.

5.4. a) Дробно-линейным отображением плоскости можно перевести любые три различные точки в любые другие три различные точки, и такое отображение единственно.
b) Дробно-линейным отображением переведите внутренность единичной окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на верхнюю полуплоскость $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.
c) Найдите все дробно-линейные отображения верхней полуплоскости на себя.
d) Инверсия сохраняет двойные отношения точек на окружностях или прямых.
e) Кватернионным дробно-линейным отображением можно перевести любые три различные точки в любые другие три различные точки. Единственно ли такое отображение?
f) Кватернионным дробно-линейным отображением переведите множество $\{q \in \mathbb{H} : |q| = 1, q \neq 1\}$ в множество $\{q \in \mathbb{H} : \operatorname{Re} q = 0\}$.
g) Построенное отображение переводит окружности в окружности или прямые.
h) Для каждого $q \in \mathbb{H}$, $|q| = 1$, множество $S_q := \{q \cdot (\cos t + i \sin t) : t \in \mathbb{R}\}$ — окружность.
i) Любую пару различных окружностей вида S_q можно непрерывно продеформировать в любую другую пару, так чтобы в процессе деформации окружности не пересекались.

5.5. В скольких точках могут пересекаться две различные окружности на $\mathbb{C}P^2$?

Задача Дня. *Расслоение Хопфа.* Разбейте пространство, из которого выбросили одну прямую, на попарно зацепленные окружности.

Сданные решения

Абрамов 1.1ab, 2.12abd, 3.1ab2a	Акимова 1.12ab4, 2.1	Буря 1.1ab2a3b4a, 2.2a–d, 3.2a
Гацолаева 1.2a	Герасимова 1.1ab2	Гринько 1.1ab23c4ab
Дмитриенко 1.13ac4a,2.12ab,3.1ab+.2a	Думанский **ЗД I**	Елишев 1.1ab2a3c4c, 2.1
Елшин 1.1ab3c	Ерошенко 1.1–1.4	Жукова 1.1a$\frac{\pm}{2}$b$\pm$
Замятин 1.123ac4bc 2.12a–d	Измаилов 1abc$\pm$2a34abc$\pm$	Ильин 1.12b3ab, 2.12ab
Каратушин 1.1a$\frac{\pm}{2}$	Карпушкин 1.1abc+.3c	Кельвич 1.1
Киселёв 1.1ab234a5ab,2.12a–d34a,3.2a	Коваленко 1.2b, 2.12a–c34ab, 3.2a	Королев 1.1ab
Краснов 1.1ab2a4c, 3.2a	Кравцов 1.1bc$\pm$2a3a$\pm$c$\pm$4ab$\pm$c$\pm$5a	Круль 1.12ab34a, 2.12a–f, 3.12a
Лагуновская 1.1a$\mp$b, 2.34ab	Литвинов 1.1a$\Rightarrow$b2a	Лященко 1.1ab, 2.12a–c
Малахов 1.1ab3c, 2.12abd	Маслов 1.1ab2, 2.1	Матушкин 1.12a4, 2.2a–e34
Мещихин 1.2a3c	Михайлов 1.1ab2a$\pm$b$\mp$3b4b$\mp$,2.12ab,3.12a	Молоков 1.4c$\pm$,2.2.a$\pm$c$\pm$d$\pm$ef$\pm$,**ЗДIII**
Неугодов 1.1ab3c4a	Никитин 1.1ab, 3.1b	Новак 1.1a$\Rightarrow$b, 3.2ab$\pm$
Пашментов 1.1ab	Райко 1.1ab234ab$\pm$c, 2.12a–d34a	Сангаджиев (?) 1.1ab
Сеилов 1.1c	Трифонов 1.1abc$\pm$23ac4a, 2.1	Федоров 1.4c
Халайджи Саша 1.1a2b	Халайджи Леша 1.2b	Хачатурян 1.1ab
Худяков 1.1ab	Шайдуров 1.12a3ac4c, 3.3c	Шарипова 1.123ac4,2.12a–e34a,3.3c
Шевцов 1.1a2a$\pm$b3a$\pm$c$\pm$	Шлыков 1.1ab	Шуклин 1.1ab2a

6. Сферическая геометрия и векторное произведение

6.1. Пролетает ли самолет Москва–Нью-Йорк над Францией?

Серия A. Рассмотрим единичную сферу с центром в начале координат O трехмерного пространства. Назовем *большой окружностью* (*сферической прямой*) сечение этой сферы произвольной плоскостью, проходящей через точку O.

Каждому ненулевому вектору пространства можно сопоставить два объекта сферической геометрии: точку на сфере и большую окружность. А именно, вектору можно сопоставить точку пересечения сферы с лучом, исходящим из точки O в направлении данного вектора (рис. 1a), и можно сопоставить сечение сферы плоскостью, проходящей через точку O и перпендикулярной этому вектору (рис. 1b). Точку (сферическую прямую), соответствующую данному вектору, будем обозначать той же буквой, что и сам вектор, только без значка вектора. Будем обозначать через $[\vec{A}, \vec{B}]$ векторное произведение векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$.

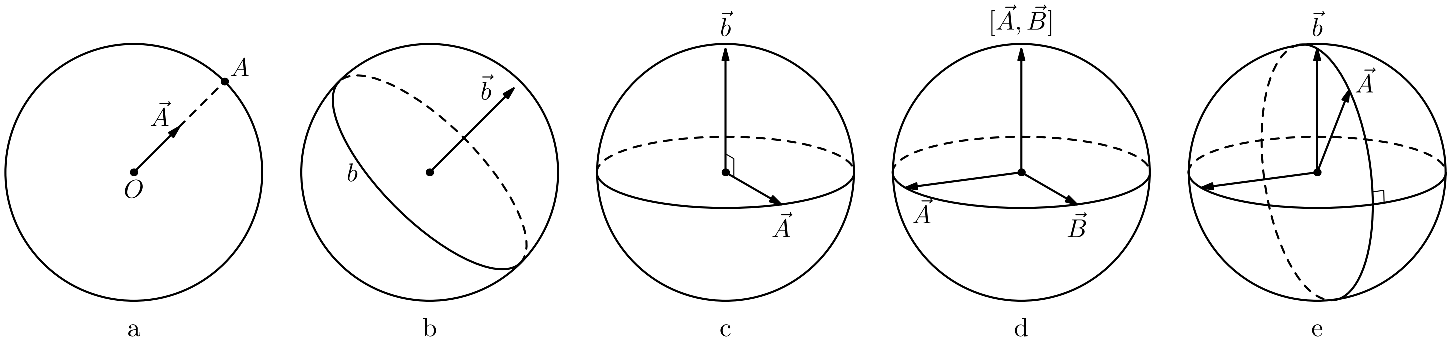


Рис. 1: Точки, прямые на сфере и векторы

6.2. a) Если векторы $\vec{A}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то точка A лежит на сферической прямой b (Рис 1c).
b) Вектор $[\vec{A}, \vec{B}]$ соответствует сферической прямой, проходящей через A и B (Рис. 1d).
c) Вектор $[\vec{A}, \vec{b}]$ (если он ненулевой) соответствует перпендикуляру, опущенному из точки A на сферическую прямую b (Рис. 1e).
d) Если $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$, то три сферические прямые a, b, c пересекаются в двух точках.
e) Докажите *тождество 'бац минус цаб'*: $[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B})$.
f) Докажите *тождество Якоби*: $[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] + [\vec{B}, [\vec{C}, \vec{A}]] + [\vec{C}, [\vec{A}, \vec{B}]] = 0$.
g) (*В.И. Арнольд*) Пусть A, B и C — вершины сферического треугольника. Что означает геометрически тождество Якоби для векторов $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$?

Серия B. В следующей задаче предполагается, что $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ — *единичные* векторы, идущие в вершины сферического треугольника ABC из центра сферы. Через AB, BC и CA обозначаются *длины* сторон треугольника, то есть длины дуг соответствующих больших окружностей. Через $\angle ABC$ обозначается угол между сферическими прямыми AB и BC.

6.3. a) Медианы треугольника на сфере пересекаются в одной точке.

Указание. Рассмотрите вектор $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$.
b) *Сферическая теорема косинусов:* $\sin AB \sin BC \cos\angle ABC = \cos AC - \cos AB \cos BC$.
Указание. Используйте тождество $([\vec{A},\vec{B}],[\vec{B},\vec{C}]) = (\vec{A},\vec{B})(\vec{B},\vec{C}) - (\vec{A},\vec{C})(\vec{B},\vec{B})$.
c) Сформулируйте и докажите сферическую теорему синусов.

Серия C. Прямую в пространстве можно задать следующим уравнением:

$$[u,x]=v.$$

Здесь u и v — фиксированные перпендикулярные друг другу векторы, а x — радиус-вектор переменной точки. Векторы u и v можно построить по данной прямой так: взять две точки A и B на этой прямой и положить $u = AB$, $v = [OA, OB]$.

Пусть $(u;v)$ и $(u';v')$ — две пары векторов. Назовем их *произведением* пару $(u'';v'')$, где $u'' = [u,u']$ и $v'' = [u,v'] + [v,u']$. Определим *сумму* пар векторов покомпонентно: $(u;v)+(u';v') = (u+u';v+v')$. Паре $(u;v)$ поставим в соответствие прямую $[u,x] = pr\,v$, где $pr\,v$ — проекция вектора v на плоскость, перпендикулярную вектору u.

6.4. a) Прямые $[u,x]=v$ и $[u',x]=v'$ пересекаются (или параллельны), если и только если $(u,v')+(v,u')=0$.
b) Наше соответствие переводит произведение в общий перпендикуляр.
c) Произведение пар векторов удовлетворяет тождеству Якоби.

Задача Дня. *Теорема Хъемслева–Морли.* Пусть a, b и c — три попарно непараллельные прямые в пространстве. Обозначим через a' общий перпендикуляр к паре прямых b и c. Далее, обозначим через a'' общий перпендикуляр к паре прямых a и a' (дано, что эти прямые непараллельны). Аналогично определим прямые b'' и c''. Тогда три прямые a'', b'' и c'' имеют один общий перпендикуляр (т.е. прямую, пересекающую их все и перпендикулярную им всем).

Сданные решения

Абрамов 1.1ab, 2.12abd, 3.1ab2a	Акимова 1.12ab4, 2.1	Астафаев 5.13a±b
Байдаков 1.1ab23ab$\frac{\pm}{2}$c±4a±c±,2.34ac$\frac{\pm}{2}$,**ЗДIII**	Буря 1.1ab2a3b4a,2.2a–d34a,3.12a,4.12a	Васильев 2.1a, 3.2a3a±
Гацолаева 1.2a	Герасимова 1.1ab23ac±4a, 2.12a±bc±d	Гринько 1.123c4ab5a±, 2.134a, 4.12a3a
Даровских 1.1ab, 3.1a2a, 4.12ab, 5.1b	Дмитриенко 1.13ac4a,2.12ab,3.1ab+.2a	Долгирев **ЗД I, III**, 2.12a34abc$\frac{\pm}{2}$
Думанский **ЗД I**	Елишев 1.1ab2a3c4c, 2.1, 4.4ab	Елшин 1.1ab3c
Ерошенко 1.1–1.4	Жукова 1.1a$\frac{\pm}{2}$b±	Замятин 1.123ac4bc,2.12a–f34bc,3.1ab±23,4.12a
Заславский 1.1–5, 2.12a–f3+.4	Измаилов 1abc±2a34abc±	Ильин 1.12b3ab, 2.12ab
Казанцев 1.12a3c4ab±c±, **ЗД III**	Каратушин 1.1a$\frac{\pm}{2}$	Карпушкин 1.1abc+.3c
Кельвич 1.1	Кириллов 4.13a	Киселёв 1.1ab234a5ab,2.12a–d34a,3.12ab+!3ab,4.12
Коваленко 1.2b4c,2.12a–c34ab,3.1a2ab3a,4.12ab3a		Королев 1.1ab
Краснов 1.1ab2a4c, 3.2a	Кравцов 1.123ac4ab±c±5a,2.2ab,4.12	Крайнюхов 4.13a
Круль 1.12ab34, 2.12a–f34a, 3.12a, 4.123a4bd	Лагуновская 1.1ab3bc±,2.12a34ab,3.2a	Литвинов 1.1a⇒b2a, 2.2a$\frac{\pm}{2}$b±de$\frac{\pm}{2}$f±
Лященко 1.1ab, 2.12a–c	Малахов 1.1ab3c, 2.12abd	Маслов 1.1ab2, 2.1, 4.12ab
Матушкин 1.12a4,2.2a–f34,**ЗД III**, 4.123a4abd,5.1a3		Мещихин 1.2a3c
Михайлов 1.1ab2a±b∓3b4b∓,2.12ab34a,3.123a,4.12a3ab4abdf–i,5.1a		Молоков 1.1ab4c±,**ЗД II–III**,4.12a,5.1a3
Неугодов 1.1ab3c4a	Никитин 1.1ab3bc4c, 3.1b2a, 4.12	Новак 1.1a⇒b, 3.2ab±, 4.12a
Новиков 1.1abc$\frac{\pm}{2}$23ab±c±4a,2.12abd–g+!,3.1a∓b±2ab±3a±		Пашментов 1.1ab,2.2a,3.12ab3a,4.12a,5.1a
Попов 1.3bc±4a5,2.4a,3.2ab±3a±	Приходько 1.1ab23a4ac,3.1a±b2ab±3a±,4.12	
Райко 1.1ab234ab±c,2.12a–eg34a,3.1a2a,4.13a	Сангаджиев (?) 1.1ab	Сеилов 1.1c
Солод 4.12	Трифонов 1.1abc±23ac4a, 2.1	Устинский 1.1ab2a, 4.12a
Федоров 1.1ab2b4c, 2.4a$\frac{\pm}{2}$, 3.2a	Халайджи Саша 1.1a2b	Халайджи Леша 1.2b
Хачатурян 1.1ab	Худяков 1.1ab	Шайдуров 1.123ac4c5c±, 2.13, 3.3c
Шарипова 1.123ac4,2.12a–f34a,3.12a3bc, 4.12,5.12d+!3		Шевцов 1.1ab2a±b3a±c±
Шлыков 1.1ab, 4.12a	Шуклин 1.1ab2a	

7. Геометрия Лобачевского

В этом цикле задач все построения производятся на плоскости Лобачевского.

Серия A. Лучи AB и CD *параллельны*, если они не пересекаются, но при этом любой луч AX, лежащий строго внутри угла CAB, пересекает луч CD. Прямые *параллельны*, если они содержат два параллельных луча. *Аксиома Лобачевского*: через точку A вне прямой CD можно провести две различные прямые, параллельные CD. *Угол параллельности* для A и CD — это половина угла между двумя проведенными прямыми.

7.1. Если две различные прямые перпендикулярны третьей прямой, то эти две прямые:
a) не пересекают друг друга; b) не параллельны друг другу;
c) не имеют других общих перпендикуляров, кроме третьей прямой.

Серия B. В *моделях Клейна и Пуанкаре* точки плоскости Лобачевского изображаются точками круга на плоскости Евклида (не включая граничную окружность). В модели Клейна прямые изображаются хордами этого круга (не включая концы), а в модели Пуанкаре — диаметрами круга или дугами с концами на граничной окружности, перпендикулярными ей (не включая концы). Расстояние между точками X и Y вычисляется по формуле $\mathrm{const}\cdot|\ln(A,B,X,Y)|$, где AB — изображение прямой, проходящей через X и Y, а $\mathrm{const}=\frac{1}{2}$ для модели Клейна и $\mathrm{const}=1$ для модели Пуанкаре.

7.2. a) Если она из перпендикулярных прямых изображается в модели Клейна диаметром, то вторая изображается перпендикулярной ему хордой.
b) Если две прямые изображаются в модели Клейна или Пуанкаре диаметрами, то угол между прямыми равен углу между их изображениями.
c) Две параллельные прямые изображаются в модели Клейна или Пуанкаре хордами или дугами с общим концом.
d) Выразите угол параллельности для точки A и прямой CD через длину перпендикуляра, опущенного из A на CD.

7.3. Пусть ABC — треугольник.
a) *Гиперболическая теорема Пифагора.* Если $\angle ABC$ — прямой, то $\operatorname{ch} AC = \operatorname{ch} AB\ \operatorname{ch} BC$.
b) *Гиперболическая теорема косинусов*: $\operatorname{sh} AB \operatorname{sh} BC \cos\angle ABC = \operatorname{ch} AB \operatorname{ch} BC - \operatorname{ch} AC$.
c) Сформулируйте и докажите гиперболическую теорему синусов.

7.4. Правильный n-угольник вписан в окружность радиуса r. Найдите:
a) стороны; b) углы; c) площадь n-угольника; d) длину и площадь окружности.

7.5. Какой фигурой изображается:
a) окружность; b) орицикл; c) эквидистанта; — в модели Пуанкаре;
d) окружность; e) орицикл; f) эквидистанта; g) конус; h) эллипс; — в модели Клейна?
Примечание. В пункте g) рассматривается 3-мерное пространство Лобачевского.
i) Через любые три точки проходит окружность, орицикл, эквидистанта, или прямая.

Задача Дня. *Фольклорная задача.* Найти геометрическое место точек плоскости Лобачевского, из которых данный отрезок виден под прямым углом.

Сданные решения

Абрамов 1.1ab2b, 2.12abd, 3.1ab2a, 6.123a	Акимова 1.12ab4, 2.1, 3.3a, 4.123a4b	Астафаев 5.13a±b
Байдаков 1.1ab23ab$\frac{\pm}{2}$c±4a±c±,2.34ac$\frac{\pm}{2}$, **ЗДIII,VI**∓,6.2d–f3b±4a		Билан 1.1ab2b, 2.12a±c±d±
Буря 1.1ab2a3b4,2.2a–d34a,3.12a,4.12,6.2a–d3b	Васильев 2.1a, 3.2a3a±	Гацолаева 1.2a
Герасимова 1.1ab23ac±4a, 2.12a±bc±d	Гринько 1.123c4ab5a±,2.134a,4.12a3a	Даровских 1.1ab,3.1a2a,4.12,5.1b2a,6.2abd3a
Дмитриенко 1.13ac4a,2.12ab,3.1ab+.2a	Долгирев **ЗД I, III**, 2.12a34abc$\frac{\pm}{2}$	Думанский **ЗД I**
Елишев 1.1ab2a3c4c, 2.1, 4.4ab	Елшин 1.1ab3c	Ерошенко 1.1–1.4
Жукова 1.1a$\frac{\pm}{2}$b±	Замятин 1.1–5abc±,2.12a–fh3–5+!, 3.1ab±23,4.12a3a4a–de±,5.1a2a3, 6.2a–cefg±	
Заславский **ЗД I,II**∓, 2.12a–g34, 3.1–3	Измаилов 1abc±2a34abc±	Ильин 1.12b3ab, 2.12ab
Казанцев 1.12a3c4ab±c±, **ЗД III**		Каратушин 1.1a$\frac{\pm}{2}$
Карпушкин 1.1abc+.3c	Кельвич 1.1	Кириллов 4.13a
Киселёв 1.1ab234a5ab,2.12a–d34a, 3.12ab+!3ab,4.123a4ab,6.23		
Коваленко 1.2b4c,2.12a–c34ab,3.1a2ab3a, 4.12ab3a,5.1a4,6.2a–e3b		Королев 1.1ab
Краснов 1.1ab2a4c, 3.2a	Кравцов 1.123ac4ab±c±5a,2.12a–ce, 4.123a4d5, 6.2a–d3a	
Крайнюхов 4.13a	Круль 1.12ab34, 2.12a–f34a, 3.12a, 4.123a4bd	Лагуновская 1.1ab3bc±,2.12a34ab,3.2a,4.12
Литвинов 1.1a⇒b2a, 2.2a$\frac{\pm}{2}$b±de$\frac{\pm}{2}$f±	Лященко 1.1ab, 2.12a–c	Малахов 1.1ab3c, 2.12abd
Маслов 1.1ab2, 2.1, 4.12ab	Матушкин 1.12a4,2.2a–f34,**ЗД III**, 4.123a4abd,5.1a3	
Мещихин 1.2a3c	Михайлов 1.1ab2a±b∓3b4b∓,2.12ab34a, 3.123a,4.12a3ab4abdf–i,5.1a2ab,6.12a–d	
Молоков 1.1ab4c±,**ЗД II–III**,4.12a,5.1a3	Неугодов 1.1ab3c4a	Никитин 1.1ab3bc4c, 3.1b2a, 4.12, 6.23a4c
Новак 1.1a⇒b, 3.2ab±, 4.12a	Новиков 1.1abc$\frac{\pm}{2}$23ab±c±4a,2.12abd–g+!,3.1a∓b±2ab±3a±	
Пашментов 1.1ab,2.2a,3.12ab3a,4.12a,5.1a	Попов 1.3bc±4a5,2.4a,3.2ab±3a±,4.3a	Приходько 1.1ab23a4ac,3.1a±b2ab±3a±,4.12
Райко 1.1ab234ab±c,2.12a–g34a,3.123a±, 4.12a3a4a, 6.2a–f3ab		
Сангаджиев (?) 1.1ab	Свириденков	1.1b3 Сеилов 1.1c
Солод 4.12	Трифонов 1.1abc±23ac4a, 2.1	Устинский 1.1ab2a, 4.12a
Федоров 1.1ab2b4c, 2.4a$\frac{\pm}{2}$, 3.2a	Халайджи Саша 1.1a2b	Халайджи Леша 1.2b
Хачатурян 1.1ab	Худяков 1.1ab	Шайдуров 1.1–34c5±, 2.13, 3.3c
Шарипова 1.123ac4,2.12a–f34a,3.12a3bc, 4.12,5.12d+!3		Шевцов 1.1ab2a±b3a±c±
Шлыков 1.1ab, 4.12a	Шляпугин 1.1ab3bc$\frac{\pm}{2}$	Шуклин 1.1ab2a

8. Геометрия Галилея

Парабола — это множество точек, равноудаленных от данной точки (*фокуса*) и данной прямой (*директрисы*), не проходящей через фокус. Любая прямая пересекает параболу либо в двух точках, либо в одной, либо не пересекает. Если имеет место второй случай, причем прямая не перпендикулярна директрисе, то прямая называется *касательной*. Две параболы, имеющие в общей точке общую касательную, называются *касающимися*.

Парабола с директрисой, параллельной оси Ox, задается уравнением $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, b, c — некоторые числа, т. е. является графиком квадратного трехчлена.

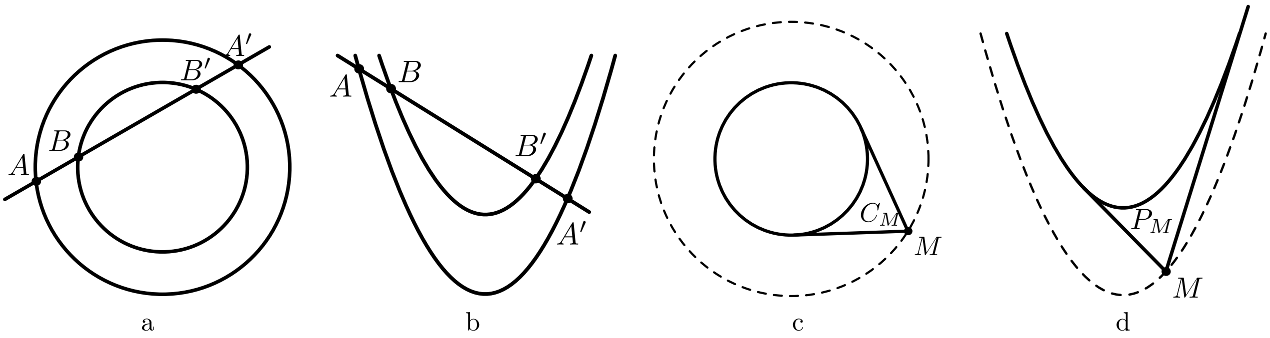


Рис. 2: Парабола как окружность

8.1. Даны парабола и точка A вне нее. Через A проведена прямая, пересекающая параболу в точках B и C. Докажите, что произведение длин проекций секущих AB и AC на директирсу не зависит от выбора прямой.

8.2. a) Прямая пересекает две концентрические окружности в точках A, B, B', A'. Точки расположены на прямой в указанном порядке. (См. рис. 2a.) Тогда $AB = B'A'$.
b) Прямая пересекает две параболы, совмещающиеся сдвигом вдоль их общей оси, в точках A, B, B', A' в указанном порядке. (См. рис. 2b.) Тогда $AB = B'A'$.
c) Две окружности пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках P и Q. Отрезок PQ делится пополам прямой AB.
d) Две параболы с параллельными осями пересекаются в точках A и B и касаются прямой в точках P и Q. Отрезок PQ делится пополам прямой AB.
e) Фигура C_M ограничена дугой окружности C и касательными к C, проведенными из точки M. (См. Рис. 2c.) Площадь C_M одинакова для всех точек M, лежащих на окружности, концентрической C.
f) Фигура P_M ограничена параболой P и касательными к P, проведенными из точки M. (См. Рис. 2d.) Площадь P_M одинакова для всех точек M, лежащих на параболе, полученной из P параллельным переносом вдоль оси.
g) Возьмем точки A и B вне окружности. Для каждой прямой, проходящей через A и пересекающей окружность в точках M, N, построим окружность, описанную вокруг BNM. Либо все эти окружности имеют помимо B еще одну общую точку B', либо они имеют общую касательную.

h) Возьмем точки A и B вне параболы. Для каждой прямой, проходящей через A и пересекающей параболу в точках M, N, построим параболу с осью, параллельной оси исходной параболы и проходящую через B, N, M. Либо все эти параболы имеют помимо B еще одну общую точку B', либо они имеют общую касательную.

8.3. a) Попытайтесь понять, что общего в приведенных выше задачах. Найдите примеры, аналогичные задаче 8.2, и докажите соответствующие утверждения. (Лучшие из найденных примеров будут представлены на разборе.)
b) Опишите наблюдаемое явление, т. е. сформулируйте как можно более широкий класс теорем, которые остаются верными после переформулировок, аналогичных тем, что сделаны в задаче 8.2 (“парабола” вместо “окружность”, “параболы, совмещающиеся параллельным переносом вдоль общей оси” вместо “концетрические окружности” и т. д.).
c) Объясните наблюдаемое явление, т. е. докажите, что истинность теорем об окружностяхв пункте b), влечет истинность аналогов этих теорем о параболах.

Особые, или *вертикальные*, прямые — это прямые, параллельные оси Oy. *Горизонтальные* прямые — это прямые, параллельные оси Ox. *Инверсия 1-го рода* с центром S и радиусом r переводит каждую точку A, не лежащую на одной вертикальной прямой с точкой S, в такую точку A' на луче SA, что произведение длин проекций отрезков SA и SA' на ось Ox равно r^2. *Инверсией 2-го рода* относительно параболы $y = ax^2 + bx + c$ называется преобразование $(x, y) \mapsto (x, 2ax^2 + 2bx + 2c - y)$.

8.4. Любая биекция плоскости, переводящая параболы с вертикальными осями или прямые в параболы с вертикальными осями или прямые, является композицией инверсий относительно парабол, отражений и сжатий относительно вертикальных и горизонтальных прямых.

Задача Дня. *Теорема Фейербаха в геометрии Галилея.* Проведем к параболе три касательные, через середины сторон образованного ими треугольника проведем параболу с осью, параллельной оси первой параболы. Тогда эти две параболы касаются.

---

9. Девять геометрий

9.1. Найдите обратное для данного a) дуального; b) двойного; числа $z = a + b\mathrm{e}$, $|z| \neq 0$.

9.2. Четыре точки плоскости a) Галилея; b) Минковского; попарные расстояния между которыми ненулевые, лежат на одном цикле, если и только если двойное отношение соответствующих им a) дуальных; b) двойных; чисел вещественно.

9.3. Сформулируйте и докажите в каждой из 9 геометрий аналоги:
a) теоремы Микеля о 6 окружностях (см. 4.3b); b) теоремы Мебиуса (см. 4.4 и 8.4).

9.4. Любая биекция плоскости Oxt, переводящая прямые в прямые, причем прямые с угловым коэффициентом ± 1 — в прямые с угловым коэффициентом ± 1, является композицией преобразования Лоренца, гомотетии и, возможно, симметрии относительно Ot.

Пространство скоростей — это множество векторов скоростей всех равномерных движений на плоскости в некоторой системе отсчета. Преобразование скоростей при переходе в новую систему отсчета будем считать *движением* пространства скоростей.

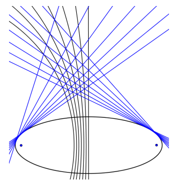
9.5. a) Какую из 9 геометрий имеет пространство скоростей в классической механике?
b) Какую из 9 геометрий имеет пространство скоростей в теории относительности?
c) Угол между скоростями тел A и B относительно тела O равен углу AOB в пространстве скоростей в соответствующей геометрии.
d) Какой ответ в Задаче Дня ниже предсказывает классическая механика?

Задача Дня. *Релятивистский прожектор.* Ракета летит мимо наблюдателя со скоростью 200000 км/с. Прожектор на ракете освещает угол $180°$ перед ней в системе отчета, связанной с ракетой. Какой угол освещает прожектор с точки зрения наблюдателя?

---

10. Геометрия тканей*

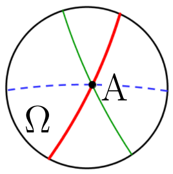
Задача Дня. *Теорема Нилова.* Докажите, что касательные прямые к эллипсу, посчитанные дважды, и окружности Аполлония с базовыми точками в фокусах данного эллипса содержат гексагональную 3-ткань.

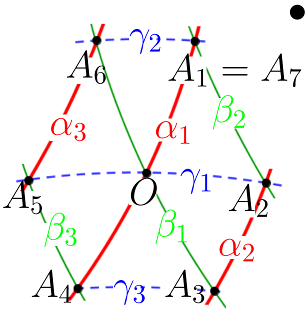


10.1. a) На плоскости даны различные точки A и B. Докажите, что для любого $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, геометрическим местом точек M, таких что $\frac{MA}{MB} = \alpha$, является окружность. Эту окружность мы будем называть *окружностью Аполлония* с базовыми точками A и B.
b) Окружности Аполлония с базовыми точками A и B ортогональны любой окружности, проходящей через точки A и B.

Далее в этом цикле задач под *окружностью* мы понимаем окружность или прямую.

Пусть некоторые дуги окружностей, содержащиеся в диске $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, концы которых лежат на границе Ω, покрашены в красный, зеленый и синий цвета. Эти дуги образуют *гексагональную 3-ткань*, если выполнены следующие два условия.





- *Условие слоения.* Через каждую точку круга Ω проходит ровно одна дуга каждого цвета. Дуги разных цветов либо не имеют общих точек, либо пересекаются в одной точке без касания.
- *Условие замыкания.* Возьмем произвольную точку O внутри Ω. Проведем через нее красную, зеленую и синюю дуги. На красной дуге возьмем произвольную точку A_1. Проведем через нее зеленую дугу. Пусть она пересекла синюю дугу через точку O в точке A_2. Через точку A_2 уже проведены зеленая и синяя дуги; проведем красную. Точку пересечения этой красной дуги с зеленой дугой через точку O обозначим A_3. Продолжая это построение, получим точки A_4, A_5, A_6, A_7. *Условие замыкания* состоит в том, что если все указанные точки существуют, то $A_7 = A_1$.

Три множества окружностей на плоскости *содержат гексагональную 3-ткань*, если их подходящие дуги (возможно, пустые) образуют гесагональную 3-ткань в подходящем диске. Допускается совпадение каких-то двух из рассматриваемых множеств окружностей; в этом случае мы берем две непересекающиеся дуги из каждой окружности данного множества и говорим, что данное множество *посчитано дважды.*

10.2. Следующие множества окружностей содержат гексагональную 3-ткань:
a) Прямые, параллельные оси Ox, прямые, параллельные оси Oy, и прямые, проходящие через начало координат O;
b) *Ткань Паппа.* Три множества прямых, проходящих через три фиксированные попарно различные точки;
c) *Ткань Брианшона.* Касательные к окружности, посчитанные дважды, и прямые, проходящие через фиксированную точку;

d) *Ткань Бляшке.* Три множества окружностей, проходящих через пары точек (A, B), (B, C) и (C, A) соответственно, где A, B, C — попарно различные точки;
e) Окружности Аполлония с базовыми точками A и B, прямые, проходящие через A, и прямые, проходящие через B;
f) Касательные к окружности с центром O, посчитанные дважды, и окружности с центром O;
h) Касательные к окружности с центром O, посчитанные дважды, и окружности, касающиеся оси Ox в точке O;
g) Нормали к параболе, посчитанные трижды;
i) *Нерешенная задача.* Касательные прямые к эллипсу, посчитанные дважды, и окружности, проходящие через оба фокуса данного эллипса.

10.3. a) *Оптическое свойство эллипса.* Дан эллипс с фокусами F_1 и F_2. Пусть прямая l касается данного эллипса в точке P. Тогда прямая l является внешней биссектрисой угла F_1PF_2.
b) *Изогональное свойство эллипса.* Проведем из любой точки P, лежащей вне эллипса, две касательные к нему. Пусть они касаются эллипса в точках X и Y. Тогда углы F_1PX и F_2PY равны.

10.4. Даны три множества дуг в круге Ω с концами на границе Ω, удовлетворяющих условию слоения. Каждой дуге поставлено в соответствие действительное число, причем разным дугам из одного множества соответствуют разные числа. Известно, что для любых трех дуг, пересекающихся в одной точке, сумма соответствующих им чисел равна нулю. Докажите, что данные множества дуг образуют гексагональную 3-ткань.

Сданные решения

Абрамов 1.1ab, 2.12abd, 3.1ab2a	Акимова 1.12ab4, 2.1	Буря 1.1ab2a3b4a,2.2a–d34a,3.12a,4.2a
Васильев 2.1a, 3.2a3a±	Гацолаева 1.2a	Герасимова 1.1ab23ac±4a, 2.12a±bc±d
Гринько 1.123c4ab5a±, 2.134a, 4.12a3a	Даровских 1.1ab, 3.1a2a, 4.12ab	Дмитриенко 1.13ac4a,2.12ab,3.1ab+.2a
Долгирев **ЗД I**	Думанский **ЗД I**	Елишев 1.1ab2a3c4c, 2.1, 4.4ab
Елшин 1.1ab3c	Ерошенко 1.1–1.4	Жукова 1.1a$\frac{\pm}{2}$b±
Замятин 1.123ac4bc 2.12a–d, 3.2a3a, 4.1	Заславский 1.123bc4a5±, 2.2a–e3+.	Измаилов 1abc±2a34abc±
Ильин 1.12b3ab, 2.12ab	Казанцев 1.1abc2a3c4ab±c±, **ЗД III**	Каратушин 1.1a$\frac{\pm}{2}$
Карпушкин 1.1abc+.3c	Кельвич 1.1	Кириллов 4.13a
Киселёв 1.1ab234a5ab,2.12a–d34a,3.2a	Коваленко 1.2b,2.12a–c34ab,3.1a2ab3a	Королев 1.1ab
Краснов 1.1ab2a4c, 3.2a	Кравцов 1.1bc23ac4ab±c±5a,2.2ab,4.12	Крайнюхов 4.13a
Круль 1.12ab34, 2.12a–f34a, 3.12a, 4.12a	Лагуновская 1.1ab3bc±, 2.12a34ab	Литвинов 1.1a⇒b2a, 2.2a$\frac{\pm}{2}$b±de$\frac{\pm}{2}$f±
Лященко 1.1ab, 2.12a–c	Малахов 1.1ab3c, 2.12abd	Маслов 1.1ab2, 2.1, 4.12ab
Матушкин 1.12a4, 2.2a–f34, **ЗД III**, 4.1	Мещихин 1.2a3c	Михайлов 1.1ab2a$_\pm$b$_\mp$3b4b$_\mp$,2.12ab34a, 3.12a,4.12a3ab4a
Молоков 1.4c±,2.2.a±c±d±ef±,**ЗДIII**	Неугодов 1.1ab3c4a	Никитин 1.1ab3bc4c, 3.1b2a, 4.12
Новак 1.1a⇒b, 3.2ab±, 4.12a	Новиков 1.1abc$\frac{\pm}{2}$2ab	Пашментов 1.1ab, 3.12ab3a, 4.1
Райко 1.1ab234ab±c,2.12a–eg34a,3.1a2a,4.13a	Сангаджиев (?) 1.1ab	Сеилов 1.1c
Солод 4.12	Трифонов 1.1abc±23ac4a, 2.1	Устинский 1.1ab2a, 4.12a
Федоров 1.1ab4c	Халайджи Саша 1.1a2b	Халайджи Леша 1.2b
Хачатурян 1.1ab	Худяков 1.1ab	Шайдуров 1.123ac4c5c±, 2.1, 3.3c
Шарипова 1.123ac4,2.12a–e34a,3.12a3c,4.12a	Шевцов 1.1a2a±b3a±c±	Шлыков 1.1ab, 4.12a
Шуклин 1.1ab2a		

11. Многомерная геометрия и реализуемость гиперграфов*

Задача Дня. *Линейная теорема Ван Кампена–Флореса.* Из любых 7 точек в 4-мерном пространстве можно выбрать две непересекающиеся тройки, такие что два треугольника с вершинами в этих тройках пересекаются.

Подмножество плоскости называется *выпуклым*, если оно содержит вместе с любыми двумя точками соединяющий их отрезок. *Выпуклой оболочкой* множества X называется наименьшее (по включению) выпуклое множество, содержащее X. В этом цикле задач под *треугольником* понимается выпуклая оболочка 3 точек, т.е., треугольникам разрешается вырождаться. Набор точек на плоскости называется набором *общего положения*, если ни какие 3 из них не лежат на одной прямой. Под n точками на плоскости подразумевается n-элементное подмножество плоскости. Т.е., считается, что эти n точек различны. Такое же соглашение касается 3- и 4-мерного пространства.

11.1. (a) Существуют такие 4 точки на плоскости, что для любого их разбиения на две пары отрезок, соединяющий точки в первой паре, не пересекает отрезок, соединяющий точки во второй паре.
(b) Любые 4 точки на плоскости можно разбить на две группы так, что выпуклая оболочка точек первой группы пересекает выпуклую оболочку точек второй группы.
(c) Из любых 5 точек на плоскости можно выбрать две такие непересекающиеся пары точек, что отрезок, соединяющий точки в первой паре, пересекает отрезок, соединяющий точки во второй паре.
(d) Если эти 5 точек находятся в общем положении, то количество таких (неупорядоченных) пар нечетно.
(e) Даны две тройки точек на плоскости. Тогда существуют два пересекающихся отрезка, не имеющие общих вершин, каждый из которых соединяет точки из разных троек.

Набор точек в пространстве называется набором *общего положения*, если ни какие 4 из них не лежат в одной плоскости. Треугольники Δ и Δ' в пространстве, шесть вершин которых находятся в общем положении, называются зацепленными, если контур Δ пересекает внутренность Δ' в единственной точке. Плоскость находится в *общем положении* относительно набора точек в пространстве, если ортогональные проекции точек набора на плоскость находятся в общем положении.

11.2. (a) Дана проекция пары треугольников на плоскость общего положения (относительно вершин треугольников), причем в местах пересечения двух линий показано, какая из них проходит выше. Треугольники зацеплены, если и только если количество точек пересечения их проекций, в которых первый проходит над вторым, нечетно.
(b) Пусть в пространстве даны 6 точек общего положения. Назовем *разбиением* неупорядоченную пару треугольников с вершинами в этих точках, не имеющих общих вершин. Тогда количество зацепленных разбиений нечетно.
(c) *Линейная теорема Конвея–Гордона–Закса.* Для любых 6 точек общего положения в пространстве найдутся два зацепленных треугольника с вершинами в этих точках.

11.3. (a) Существуют 5 точек в $\mathbb{R}^4$, которые нельзя разбить на две группы так, что выпуклая оболочка точек первой группы пересекает выпуклую оболочку точек второй группы.
(b) *Теорема Радона.* Любые 6 точек в $\mathbb{R}^4$ можно разбить на две группы так, что выпуклая оболочка точек первой группы пересекает выпуклую оболочку точек второй группы.
(c) *Теорема Каратеодори.* Для любой точки x выпуклой оболочки множества X в $\mathbb{R}^4$ найдутся 5 (или меньше) точек множества X таких, что x содержится в выпуклой оболочке этих 5 (или меньше) точек.

Набор точек в $\mathbb{R}^4$ называется набором *общего положения*, если никакие 5 из них не лежат в одной гиперплоскости.

11.4. Пусть 0,1,2,3,4,5,6 — 7 точек общего положения в $\mathbb{R}^4$, причем первая координата x_0 точки 0 строго больше первых координат остальных точек. Пусть никакие два треугольника с вершинами в этих 7 точках, не имеющих общих вершин, не пересекаются.
(a) Проекции точек 1,2,3,4,5,6 из точки 0 на гиперплоскость $x = x_0 - \epsilon$ находятся в общем положении для достаточно малого $\epsilon > 0$.
(b) Для любого разбиения $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{i, j, k\} \cup \{p, q, r\}$ поверхности тетраэдров $0ijk$ и $0pqr$ пересекаются ровно в одной точке.
(c) Поверхности двух тетраэдров в $\mathbb{R}^4$ пересекаются ровно в одной точке, являющейся их общей вершиной. Тогда если гиперплоскость пересекает поверхности этих тетраэдров по паре треугольников, то эти треугольки не зацепленны в гиперплоскости.

Сданные решения

Абрамов 1.1ab2b,2.12abd,3.1ab2a, 4.13a4ad,5.1a,6.123a,7.12a–c,8.12ab,9.1ab5d,10.1a–d

Акимова 1.12ab4,2.1,3.3a,4.123a4b,6.23a

Астафаев 1.1b∓c2a, 5.13a±b

Байдаков 1.1ab23ab$\frac{\pm}{2}$c±4a±c±,2.34ac$\frac{\pm}{2}$,**ЗДIII,VI**∓,4.14a,6.2d–f3b±4ab,7.12a±cd5d$\frac{\pm}{2}$

Безадунова 8.2a

Билан 1.1ab2b,2.12a±c±d±f$\frac{\pm}{2}$h,4.12, 6.2ef3ab±,**ЗДVIII,IX**

Буря 1.1ab2a3b4,2.2a–d34a,3.12a3ac,4.12, 5.2a3,6.12a–d3b,7.12ac,8.12abe,9.15ad ,10.1a–c

Васильев 2.1a, 3.2a3a±

Габдурахманов **ЗДI,IX**,2.12abd,3.2a5,4.12a

Гаглоев 4.12ab+.3a±b±4a±bc∓d∓e±f±,5.1a$\frac{\pm}{2}$

Гацолаева 1.2a

Герасимова 1.1ab23ac±4a, 2.12a±bc±d

Гринько 1.123c4ab5a±,2.134a,4.12a3a

Даровских 1.1ab,3.1a2a,4.12,5.1b2a,6.2abd3a

Дмитриенко 1.13ac4a,2.12ab,3.1ab+.2a

Долгирев **ЗД I,III**,2.12a34abc$\frac{\pm}{2}$,5.12a4

Думанский **ЗД I**

Елишев 1.1ab2a3c4c,2.12a±b±d±,4.14ab, 6.2abef,**ЗДIX**

Елшин 1.1ab3c,3.1a,4.2a

Ерошенко 1.1–1.4

Жукова 1.1a$\frac{\pm}{2}$b±

Замятин 1.1–5abc±,2.12a–fh3–5+!, 3.1ab±23,4.123a4a–de±,5.1a2a3,6.12a–g34b, 7.1ac2b±cdmod(abc)4a+!bcd$\frac{\pm}{2}$,8.2a–f3a,9.12a,10.1a

Заславский **ЗД I,II**,3.1–3,4.123a,5.2a–c

Измаилов 1abc±2a34abc±

Ильин 1.12b3ab, 2.12ab

Казанцев 1.12a3c4ab±c±, **ЗД III**

Каратушин 1.1a$\frac{\pm}{2}$

Карпушкин 1.1abc+.3c,2.14ab,3.1b2a,10.1a–d

Кельвич 1.1

Кириллов 4.13a

Киселёв 1.1ab234a5ab,2.12a–d34a, 3.12ab+!3ab,4.123a4abf,5.1ab4, 6.23,7.12a–d3a5ab,8.12a–f,9.12a

Коваленко 1.1b2b4c,2.12a–c34ab,3.1a2ab3a, 4.12ab3a,5.1a2a34,6.23b,7.12bc, 8.12a–c,9.12a,10.1a–c

Королев 1.1ab

Котельников 1.1ab

Краснов 1.1ab2a4c, 3.2a

Кравцов 1.123ac4ab±c±5a,2.12a–ce, 4.123a4d5, 6.2a–d3a

Крайнюхов 4.13a

Круль 1.12ab34,2.12a–f34a,3.12a, 4.123a4bd,5.1a,6.12ab,8.12a–cef,10.1ab3a

Лагуновская 1.1ab3bc±,2.12a34ab,3.2a,4.12

Литвинов 1.1a⇒b2a, 2.2a$\frac{\pm}{2}$b±de$\frac{\pm}{2}$f±

Лукашкин 1.1b2a$\frac{\pm}{2}$3b$\frac{\pm}{2}$5a+.c±,3.1ab+.2a+.b3a

Лященко 1.1ab, 2.12a–c

Малахов 1.1ab3c, 2.12abd

Маслов 1.1ab2,2.12ac,3.12a,4.12ab,5.1a3ab,6.2abd,7.1ab2ac,8.12a–c,**ЗД IX**,10.1a–c

Матушкин 1.12a4,2.2a–f34,**ЗД III!,VI,X**, 4.123a4abd,5.1a3,7.1,8.12a–ce,9.1

Мещихин 1.2a3c, 8.1

Михайлов 1.1ab2a±b∓3b4b∓,2.12ab34a,3.123a,4.12a3ab4abdf–i,5.1a2ab3a,6.12a–d, 7.1ab2ab5ab,8.12ae9.1ab5d,10.1a–c

Молоков 1.1ab2a4c,**ЗД II–III**,4.12a, 5.1a3,8.12ac

Неугодов 1.1ab3c4a

Никитин 1.123bc4c,2.12a–e,3.12,4.12, 5.1ab3a,6.23a4c,8.12abce,**ЗД IX**

Никулин 1.1ab2b,2.12a–c

Новак 1.1a⇒b, 3.2ab±, 4.12a

Новиков 1.1abc$\frac{\pm}{2}$23ab±c±4a,2.12abd–g+!, 3.1a∓b±2ab±3a±,4.123a±b∓4b±c∓,6.2a–df3

Пашментов 1.1ab,2.2a,3.12ab3a,4.12a3a, 5.1a2a3a,6.2a–c,8.2ae

Попов 1.3bc±4a5,2.4a,3.2ab±3a±,4.3a

Приходько 1.1ab23a4ac,3.1a±b2ab±3a±, 4.12,**ЗД I–II,IV+.,V,VII+.,VIII,IX**

Райко 1.1ab234ab±c,2.12a–g34a,3.123a±, 4.12a3a4a,5.2a3ab4,6.2a–f3ab,7.12a–d, 8.12a–eg3a+!,9.15d,10.1a–c

Сангаджиев (?) 1.1ab

Свириденков 1.1b3

Сеилов 1.1c

Солод 2.12b,3.1a2a,4.12,6.2a–c,8.12ab,9.1a

Табаков 1.1ab3c,2.12a,3.2a,4.2, 10.1ab

Трифонов 1.1abc±23ac4a, 2.1

Устинский 1.1ab2a, 4.12a

Федоров 1.1ab2b4c, 2.4a$\frac{\pm}{2}$, 3.2a

Хабарова1.1

Халайджи Саша 1.1a2b

Халайджи Леша 1.2b

Хачатурян 1.1ab

Худяков 1.1ab

Шайдуров **ЗДI**,2.12a±be±f3,3.23c, 4.12a,5.1a3,6.2a–c,7.1ab,8.12ac,9.1,10.1a

Шарипова 1.123ac4,2.12a–g34a5,3.12a3bc,4.12,5.12a–d+!3,6.2a–d,7.1,8.12a–d,9.15d,10.1

Шевцов 1.123ab±c,2.12a–dg3±4a±, **ЗДIV,IX**,6.12a–df,8.1

Шлыков 1.1ab, 4.12a

Шляпугин 1.1ab3bc$\frac{\pm}{2}$4a, 2.1

Шуклин 1.1ab2a

Ягудин 2.5±,4.1234abd±,**ЗД II±,III,VI**

Экзамен

1. С помощью линейки разделите сторону квадратного стола на 3 равные части. Проводить линии можно только в пределах стола.

2. a) На плоскости даны четыре окружности. Первая касается второй, вторая — третьей, третья — четвертой, четвертая — первой. Первая окружность не пересекает третью, а вторая не пересекает четвертую. Докажите, что четыре точки касания лежат на одной окружности или прямой.
b) Остается ли утверждение пункта a) верным, если в нем окружностям разрешено пересекаться?
c) Остается ли утверждение пункта a) верным, если в нем "окружность" заменить на "парабола с осью, параллельной оси Oy"?
d) Остается ли утверждение пункта a) верным, если "плоскость" заменить на "сферу"?
e) Остается ли утверждение пункта a) верным в геометрии Лобачевского?

3. Какое наибольшее количество непересекающихся полуплоскостей можно расположить на плоскости Лобачевского?

4. a) Даны четыре различные точки A, B, C, D. Докажите, что их можно инверсией перевести в вершины параллелограмма $A'B'C'D'$ (так что A переходит в A', B в B' итд).
b) Докажите, что параллелограммы, которые можно получить таким образом, подобны.

5. На окружности γ, описанной около треугольника ABC, взяты две точки P и Q. Серединный перпендикуляр l к отрезку PQ пересекает прямые BC, CA, AB в точках A', B', C'. Пусть A'', B'', C'' — вторые точки пересечения l с окружностями, описанными около треугольников $A'PQ$, $B'PQ$, $C'PQ$. Докажите, что прямые AA'', BB'', CC'' пересекаются в одной точке.

Экзамен

Разрешается пользоваться всеми материалами, имеющимися у Вас. Запрещается такие материалы передавать и пользоваться средствами связи.

Разрешается пользоваться без доказательства любыми теоремами из курса при условии приведения их *полных четких формулировок* в виде

Теорема. ⟨*утверждение, осмысленное и верное, даже если его вырезать из текста*⟩

1. a) Дан угол AOB и точка C, не лежащая на его сторонах и их продолжениях. Две прямые, проходящие через C, пересекают стороны угла или их продолжения в четырех различных точках X_1, Y_1 и X_2, Y_2, соответственно. Найти ГМТ пересечения прямых X_1Y_2 и X_2Y_1.
b) С помощью короткой линейки постройте отрезок с концами в двух точках, расстояние между которыми больше длины линейки. (За один шаг построения через две точки на расстоянии меньше длины линейки можно проводить отрезок, равный длине линейки).

2. a) Даны три окружности. Первая окружность пересекает вторую в двух различных точках и не пересекает третью. Докажите, что найдется окружность или прямая, перпендикулярная этим трем окружностям.
b) Остается ли утверждение верным, если все три окружности попарно пересекаются?
c) Остается ли утверждение пункта a) верным в геометрии Лобачевского?

3. Какой точкой изображается середина отрезка между точками $(0.6; 0)$ и $(0.6; 0.6)$ в модели Клейна геометрии Лобачевского в единичном круге?

4. Дана сфера, плоскость, касающаяся ее, и точки A, B, C, D в этой плоскости. Плоскости, проходящие через прямые AB, BC, CA и касающиеся сферы, пересекаются в точке D', точки A', B', C' определяются аналогично. Докажите, что точки A', B', C', D' лежат в одной плоскости, касающейся сферы.

5. Существует ли в пространстве Лобачевского куб с двугранным углом $\pi/6$? (Под кубом понимается правильный многогранник с таким же графом ребер, как у обычного куба.)

Результаты участников курса

Сданные решения

Абрамов 1.1ab2b,2.12abd,3.1ab2a, 4.13a4ad,5.1a2a4,6.123a,7.12a–c,8.12ab,9.1ab5d,10.1a–d

Акимова 1.12ab4,2.1,3.3a,4.123a4b,6.23a

Астафаев 1.1b∓c2a, 5.13a±b

Байдаков 1.1ab23ab$\frac{\pm}{2}$c±4a±c±,2.34ac$\frac{\pm}{2}$, **ЗДIII,VI**∓,4.14a,6.2d–f3b±4ab,7.12a±cd5d$\frac{\pm}{2}$

Безадунова 8.2a

Билан 1.1ab2b,2.12a±c±d±f$\frac{\pm}{2}$h4a,3.12, 4.12,5.13a,6.2ef3ab±,7.1,**ЗДVIII,IX**, 10.1abc

Буря 1.1ab2a3b4,2.2a–d34a,3.12a3ac,4.12, 5.2a3,6.12a–d3b,7.12ac,8.12abe,9.15ad ,10.1a–c

Васильев 1.1ab3c,2.1a2a±b±d±,3.1a±2a3a±, 4.12a$\frac{\pm}{2}$,6.2abc,7.1a5a∓b∓c∓f∓,8.2a,9.1ab5d

Габдурахманов **ЗДI,IX**,2.12abd,3.1a2a5, 4.12a3a,5.1a3ab,6.2abd,7.1,8.12ab,10.1abc

Гаглоев 4.12ab+.3a±b±4a±bc∓d∓e±f±,5.1a$\frac{\pm}{2}$

Гацолаева 1.2a

Герасимова 1.1ab23ac±4a, 2.12a±bc±d

Гринько 1.123c4ab5a±,2.134a,4.12a3a

Даровских 1.1ab,3.1a2a,4.12,5.1b2a,6.2abd3a

Дмитриенко 1.13ac4a,2.12ab,3.1ab+.2a

Долгирев **ЗД I–III,VI**,4.123a4a,5.12a4, 7.125adf,8.12b–d,9.1ab5d,10.1a3bc

Думанский **ЗД I**

Елишев 1.1ab2a3c4c,2.12a±b±d±,4.14ab, 6.2abef,**ЗДIX**

Елшин 1.1ab3c,3.1a,4.2a

Ерошенко 1.1–1.4

Жукова 1.1a$\frac{\pm}{2}$b±

Замятин 1.1–5abc±,2.12a–fh3–5+!, 3.1ab±23,4.123a4a–de±,5.1a2a3,6.12a–g34b, 7.1ac2b±cdmod (abc)4a+!bcd$\frac{\pm}{2}$,8.2a–f3a,9.12a,10.1abc

Заславский **ЗД I,II**,3.1–3,4.123a,5.2a–c, 6.2abc,7.1,8.2aceg,9.1ab5d,10.1abc

Измаилов 1abc±2a34abc±

Ильин 1.12b3ab, 2.12ab

Казанцев 1.12a3c4ab±c±, **ЗД III**

Каратушин 1.1a$\frac{\pm}{2}$

Карпушкин 1.1abc+.3c,2.14ab,3.1b2a,10.1a–d

Кельвич 1.1

Кириллов 1.1ab3a,2.12ab,3.23a, 4.12a3a,5.1a3,6.2abde,7.1ab5a,8.12ae,9.1ab5d,10.1a–c

Киселёв 1.1ab234a5ab,2.12a–d34a, 3.12ab+!3ab,4.123a4abf,5.1ab4, 6.23,7.12a–d3a5abci,8.12a–f,9.12a,10.1abc

Коваленко 1.1b2b4c,2.12a–c34ab,3.1a2ab3a, 4.12ab3a,5.1a2a34,6.23b,7.12bc, 8.12a–c,9.12a,10.1a–c

Королев 1.1ab

Котельников 1.1ab

Краснов 1.1ab2a4c, 3.2a

Кравцов 1.123ac4ab±c±5a,2.12a–ce, 4.123a4d5, 6.2a–d3a

Крайнюхов 4.13a

Круль 1.12ab34,2.12a–f34a,3.12a, 4.123a4bd,5.13a,6.12ab,7.1ac2c,8.12a–cef,9.1ab5a,10.1ab3a

Лагуновская 1.1ab3bc±,2.12a34ab,3.2a,4.12

Литвинов 1.1a⇒b2a, 2.2a$\frac{\pm}{2}$b±de$\frac{\pm}{2}$f±

Лукашкин 1.1a+.b2a$\frac{\pm}{2}$3b$\frac{\pm}{2}$5a+.c±, 2.12a±bdf,3.1ab+.2a+.b3a,3.123a,4.2a4b∓d,6.2ce–g3a,8.2a

Лященко 1.1ab, 2.12a–c

Малахов 1.1ab3c, 2.12abd

Маслов 1.1ab2,2.12ac,3.12a,4.12ab,5.1a3ab, 6.2abd,7.1ab2ac,8.12a–c,**ЗД IX**,10.1a–c

Матушкин 1.12a4,2.2a–f34,**ЗД III!,VI,X**, 4.123a4abd,5.1a3,7.1,8.12a–ce,9.15d

Мещихин 1.2a3c, 8.1

Михайлов 1.1ab2a±b∓3b4b∓,2.12ab34a, 3.123a,4.12a3ab4abdf–i,5.1a2ab3a,6.12a–d, 7.1ab2ab5ab,8.12ae9.1ab5d,9.2a±5a,10.1a–c3a

Молоков 1.1ab2a4c,**ЗД II–III**,4.12a4b, 5.1a3,6.2a–c,7.5b,8.12ac,9.1ab4,10.1abce

Неугодов 1.1ab3c4a

Никитин 1.123bc4c,2.12a–e,3.12,4.12, 5.1ab3a,6.23a4c,7.12ab±c±8.12abce,**ЗД IX**,10.1abc

Никулин 1.1ab2b,2.12a–c

Новак 1.1a⇒b, 3.2ab±, 4.12a

Новиков 1.1abc$\frac{\pm}{2}$23ab±c±4a,2.12abd–g+!, 3.12ab±3a±,4.123a±b∓4b±c∓,5.13a,6.2a–df3, 7.1,8.1±2a–c,**ЗДIX–X**

Пашментов 1.1ab2b,2.12ab,3.12ab3a,4.12a3a,5.1a2a3a,6.2a–c,7.1ab2b,8.2ace,9.1ab5d,10.1abc

Попов 1.3bc±4a5,2.4a,3.2ab±3a±,4.3a

Приходько **ЗД I–IX** ⇒ экзамен автоматом

Райко 1.1ab234ab±c,2.12a–g34a,3.123a±, 4.12a3a4a,5.2a3ab4,6.2a–f3ab,7.12a–d, 8.12a–eg3a+!,9.15d,10.1a–c

Сангаджиев (?) 1.1ab

Свириденков 1.1b3

Сеилов 1.1c

Солод 2.12b,3.1a2a,4.12,6.2a–c,8.12ab,9.1a

Табаков 1.1ab3c,2.12a,3.2a,4.2, 10.1ab

Трифонов 1.1abc±23ac4a, 2.1

Устинский 1.1ab2a, 4.12a

Федоров 1.1ab2b4c, 2.4a$\frac{\pm}{2}$, 3.2a

Хабарова1.1

Халайджи Саша 1.1a2b

Халайджи Леша 1.2b

Хачатурян 1.1ab

Худяков 1.1ab

Шайдуров **ЗДI**,2.12a±be±f3,3.23c, 4.12,5.1a3,6.2a–c,7.1,8.12ac,9.15d,10.1abc

Шарипова 1.123ac4,2.12a–g34a5,3.12a3bc, 4.12,5.12a–d+!3,6.2a–d,7.1,8.12a–d,9.15d,10.1

Шевцов 1.123ab±c,2.12a–dg3±4a±, 3.123a,**ЗДIV,IX**,5.12b,6.12a–df,7.5ab∓ci,8.12ab,10.1ab3ab

Шлыков 1.1ab, 4.12a

Шляпугин 1.1ab3bc$\frac{\pm}{2}$4a, 2.1

Шуклин 1.1ab2a

Ягудин 1.1ab2,4.1234abd±,5.2ab3,7.2abc,8.12ab,9.1

Инструкция для принимающих задачи.

Наша цель — научить, а не просто проверить правильность решений!

1. В начале беседы спросите у сдающего имя и фамилию, и запишите на листочек.

2. В начале рассказа решения каждой задачи требуйте ответ.

3. Для всех вспомогательных утверждении спрашивайте четкие формулировки и полные доказательства. Если при рассказе станет ясно, что сдающий полностью понимает какое-то рассуждение, то детали можно пропустить.

4. Если в решении обнаружен пробел, то четко объясните сдающему, в чем он состоит. После этого переходите к следующей задаче. Сдающий сможет исправить ошибку при следующем подходе. Не разрешайте в процессе сдачи заделывать сколь-нибудь серьезные дыры в решении, а тем более — решать задачи в процессе сдачи. Нет времени!

5. Если у решающего возникли трудности, дайте подсказку (но не решение!).

6. В конце обсуждения каждой задачи запишите ее номер и оценку, можно частичную.

7. В конце семинара отдайте лектору листочек с оценками.

Ответы и критерии проверки

1.4. b) Ответ: 1 : 1.
b) ± правильное сведение к случаю равнобокой трапеции, который не разобран.
c) − нет четкой формулировки алгоритма построения, отделенного от доказательства.

Задача 2 дня. ∓ доказано в предположении, что отображение непрерывно.
2.2. c, e) Ответ: −1. a) Ответ: $(A, B, C, D) = x$;$(B, A, C, D) = 1/x$;$(A, C, B, D) = 1 - x$ итд
a) − отсутствует ответ, т.е., 24 равенства.
2.3. c) ± забыто, что проекция/проективное преобразование не всюду определены.
d) ± забыт случай трапеции.
2.4. a)— e) ± сведение к частным случаям, не все из которых разобраны (например, забыто, что некоторые прямые после проекции могут оказаться параллельными).
2.5. a), b) ± потерян случай $x = y$. c) − утверждается, что c) следует из a).
c) ± доказано в предположении, что отображение непрерывно

Задача 3 дня. Ответ: дуга гиперболы, проходящей через A, B, C, центр масс M и ортоцентр H треугольника ABC, заключенная между M и H.
∓ доказано, что AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке K или параллельны
± доказано, что ГМТ K — коника, или не указано, что часть точек выбрасывается
3.2. d) Ответ: $\pm AC \cdot BD/AD \cdot BC$, знак определяется $AC \cap BD$. e) Ответ: −1.
a), b), d) ± доказано с точностью до знака
3.5. ∓ доказано в одну сторону.

4.1. a) Ответ: данная точка вместе с инверсной ей.
± потерян случай точки на окружности или в ее центре.
b) ± Не рассмотрена возможность вырождения искомой окружности в прямую.
4.3. a) ± не отслеживается, внешнее или внутреннее касание происходит.
b) ± предполагается, что описанные окружности 2-х из треугольников не касаются
b), c) ± счет углов, который проходит не для любого случая расположения
4.4. ± доказано в предположении, что отображение непрерывно.
4.5. Ответ: Нет (такое множество вместе с образом будет содержать и центр инверсии).

5.1. Ответ: $(\bar{a}b + a\bar{b})/2$.
5.4. c) Ответ: $z \mapsto (az+b)(cz+d)^{-1}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad-bc = 1$. f) Ответ: $q \mapsto (1+q)(1-q)^{-1}$.
b), f) ± нет проверки всех требуемых свойств построенного отображения.
d) ∓ используется без доказательства, что определения двойного отношения в листках 1 и 2 равносильно определению через комплексные числа.
5.5. Ответ: 2, 3, или 4 (концентрические, касающиеся, или остальные — соответственно). Две общие точки, которые есть всегда — $(1 : \pm i : 0)$.