

Независимый Московский Университет, весна 2020

**ПЕРЕСЕЧЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ МОДУЛЕЙ  
КРИВЫХ**

Спецкурс рекомендован для 3 курса и старше

Слово *пересечение* в названии можно понимать в общечеловеческом смысле (в теории модулей кривых пересекаются многие разделы математики), а можно – в техническом (как название теории Виттена-Концевича-Мирзахани-..., описывающей индексы пересечения  $\psi$ -классов на пространствах модулей комплексных кривых). Авторы этой теории удостоились филдсовских премий, но тема не закрыта – её активное осмысление и обобщение продолжается.

Изложение в основном будет следовать работе [Kontsevich1992], но будут использованы упрощения из [MulChasaf2011]. Из альтернативных доказательств будет достаточно подробно рассказано изложенное в [ЛанКаз2010]; прочие будут кратко упомянуты. Будут подчеркнуты связи с теорией *детских рисунков*.

### Программа курса

1. Пространства модулей кривых  $\mathcal{M}_g(\mathbb{k})$ 
  - 1.0. Наивное определение и случаи малых родов  $g$
  - 1.1. Функтор семейств кривых и стеки  $\mathfrak{M}_g(\mathbb{k})$
  - 1.2. Ригидификация и пространства  $\mathcal{M}_g^\Gamma(\mathbb{k})$
  - 1.3. Трансцендентные определения пространств  $\mathcal{M}_g(\mathbb{C})$
  - 1.4. Компактификация Делиня-Мамфорда  $\overline{\mathcal{M}}_g(\mathbb{k})$
2. Пространства  $\overline{\mathcal{M}}_{g,N}(\mathbb{C})$  и их комбинаторные модели
  - 2.0. Стабильные кривые и отмеченные точки на них
  - 2.1. Метризованные ленточные графы
  - 2.2. Теория Штребеля-Пеннера-...
  - 2.3. Комбинаторная интерпретация расслоений  $\mathcal{L}_i$  и их классов Чжэня
  - 2.4. Объёмы пространств модулей и их преобразование Лапласа
  - 2.5. Дискретная версия теории и арифметика
3. Доказательство Концевича гипотезы Виттена
  - 3.0. Производящая функция для индексов пересечений
  - 3.1. Матричные интегралы
  - 3.2. Основное комбинаторное тождество Концевича
  - 3.3. Матричная функция Эйри и её асимптотическое разложение
  - 3.4. Приложения, обобщения и новые идеи
4. Другие доказательства гипотезы Виттена
  - 4.0. Алгебро-геометрическое доказательство Казаряна-Ландо
  - 4.1. О теории Мирзахани
  - 4.2. О доказательствах Окунькова-Пандарипанде и Кима-Лю
  - 4.3. Обзор используемых конструкций

Г.Б. Шабат

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [**Kontsevich1992**] Maxim Kontsevich, *Intersection Theory on the Moduli Space of Curves and the Matrix Airy Function*. Commun. Math. Phys. 147, 1-23 (1992).
- [**MulChaSaf2011**] Motohico Mulase, Kevin Chapman and Brad Safnuk, *The Kontsevich constants for the volume of the moduli of curves and topological recursion*. Communications in Number Theory and Physics 5, 643–698 (2011).
- [**ЛанКаз2010**] С. К. Ландо, М. Э. Казарян, *Приложение: Алгебро-геометрическое доказательство гипотезы Виттена*. В кн.: Графы на поверхностях и их приложения. М. : МЦНМО, 2010.