План исследований И.В. Аржанцева в рамках проекта

«Унипотентные группы алгебраических преобразований»

подданного на конкурс Гранты Саймонса 2011 года

Представленный проект посвящен теории алгебраических групп преобразований над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики. Классическим объектом изучения в теории инвариантов являются действия редуктивных групп на аффинных и проективных алгебраических многообразиях. Для этого класса действий известно множество глубоких результатов и эффективных методов исследований. Большинство из них опирается на полную приводимость рациональных модулей редуктивной группы и теорию представлений со старшим весом. Эта техника неприменима в случае действий нередуктивных алгебраических групп. Здесь общая теория развита не так глубоко, однако в последнее время в этой области наметился значительный прогресс.

В рамках проекта мы рассматриваем в основном действия унипотентных алгебраических групп. Планируется исследовать вопросы существования и построения факторов по таким действиям, продолжить изучение эквивариантных пополнений коммутативных унипотентных групп и развить технику описания орбит действия группы специальных автоморфизмов на аффинных многообразиях.

Хорошо известно, что для действия редуктивной группы G на аффинном многообразии X морфизм факторизации $X \to X//G := \operatorname{Spec} \mathbb{K}[X]^G$ является категорным фактором в категории алгебраических многообразий, см. [2]. В случае действий на проективном многообразии геометрическая теория инвариантов предлагает конструкцию построения инвариантных открытых подмножеств (т. н. множеств полустабильных точек), каждое из которых допускает категорный фактор. Известно несколько подходов к геометрической теории инвариантов для нередуктивные группы, обзор которых дан в работе [20]. В препринте [8] мы получаем критерий существования категорного фактора для факториальных действий алгебраических групп, в частности, для действий унипотентных групп на факториальных квазиаффинных многообразиях. Одна из целей проекта — использовать этот критерий для обоснования существования тех или иных многообразий модулей, например, многообразий двойных смежных классов. Также планируется развить намеченный в [12] и [8] метод комбинаторного описания множеств полустабильных точек на проективном многообразии X с помощью редукции к квазиаффинному случаю, которая состоит в подъеме действия на кольцо Кокса $R(X)$ многообразия X, см. [9]. Другие применения этой редукции получены в [1] и [11].

Систематическое исследование эквивариантных пополнений коммутативной унипотентной группы $\mathbb{G}_a^n$ было начато в работе [24]. Там установлено замечательное соответствие между $\mathbb{G}_a^n$-структурами (т.е. действиями группы $\mathbb{G}_a^n$ с открытой орбитой) на проективных многообразиях и локальными конечномерными алгебрами, которое мы называем соответствием Хассетта-Чинкеля. Среди прочего, этот подход позволяет описать все $\mathbb{G}_a^n$-структуры на проективной пространстве $\mathbb{P}^n$. В работе [4] доказана единственность $\mathbb{G}_a^n$-структуры на невырожденной проективной квадрике. В [15] мы исследуем $\mathbb{G}_a^n$-структуры на вырожденных квадриках, а в [7] находим все многообразия флагов, допускающие $\mathbb{G}_a^n$-структуру. В цикле работ [21], [22] и [23] построено и исследовано каноническое вырождение произвольного многообразия флагов к многообразию с $\mathbb{G}_a^n$-структурой. Изучение геометрии этого класса многообразий приводит к интересным результатам в теории представлений и комбинаторике. Все $\mathbb{G}_a^2$-структуры на (особых) поверхностях дель Пеццо найдены в [19]. Мы планируем продолжить начатое в [15] изучение такого инварианта $\mathbb{G}_a^n$-структуры как модальность. В частности, будет исследована стратификация локальной схемы Гильберта, определяемая модальностью, и найдены приложения этой стратификации к исследованию пар коммутирующих нильпотентных операторов, см. [16]. Другая интересная задача — описание $\mathbb{G}_m^{n_1} \times \mathbb{G}_a^{n_2}$-структур в терминах конечномерных (не локальных) алгебр и отыскание таких структур на проективных многообразиях. О возможных применениях $\mathbb{G}_m^1 \times \mathbb{G}_a^1$-структуры на особой поверхности дель Пеццо к доказательству гипотезы Манина о числе рациональных точек ограниченной высоты, см. [19].

Известно, что задание $\mathbb{G}_a$-подгруппы в группе автоморфизмов аффинного многообразия X равносильно заданию локально нильпотентного дифференцирования алгебры $\mathbb{K}[X]$. Описание таких подгрупп, нормализуемых тором T, получено в работах [26] и [27] в терминах корней Демазюра [18] и теории Альтманна-Хаузена [5]. Основываясь на том, что группа SL_2 порождается двумя $\mathbb{G}_a$-подгруппами, мы планируем в [14] описать SL_2-действия на аффинных T-многообразиях.

Определим группу специальных автоморфизмов SAut(X) многообразия X как подгруппу в Aut(X) порожденную $\mathbb{G}_a$-подгруппами. Аффинное многообразие X называется гибким, если касательное пространство в каждой его гладкой точке порождается сечениями локально нильпотентных векторных полей. В [10] мы доказывает, что в размерности ≥ 2 гибкость равносильна (бесконечной) транзитивности действия группы SAut(X) на гладких точках. В [25] и [13] найдены широкие классы гибких многообразий, например, невырожденные аффинные торические многообразия и надстройки. Остается невыясненным вопрос о гибкости аффинных вложений однородных пространств, см. [6]. В [10], используя конструкцию из работы [3], мы доказываем гибкость гладких аффинных вложений, а также гибкость нормальных аффинных SL_2-вложений. Последний результат основан на упомянутом выше методе подъема автоморфизмов на кольцо Кокса и явном описании этого кольца из [17]. Мы применим этот метод для проверки гибкости других классов вложений, в частности, орисферических многообразий и редуктивных аффинных моноидов.

Список литературы

[1] И.В. Аржанцев и С.А. Гайфуллин. Кольца Кокса, полугруппы и автоморфизмы аффинных многообразий. Мат. Сборник 201 (2010), вып. 1, 3–24.

[2] Э.Б. Винберг и В.Л. Попов. Теория инвариантов. Фундаментальные проблемы математики. Современные направления. Том 55 (Алгебраическая геометрия-4). М.: ВИНИТИ, 1989.

[3] В.Л. Попов. Классификация трехмерных аффинных алгебраических многообразий, квазиоднородных относительно алгебраической группы. Изв. АН СССР. Сер. матем. 39 (1975), вып. 3, 566–609.

[4] Е.В. Шаройко. Соответствие Хассета-Чинкеля и автоморфизмы квадрики. Мат. Сборник 200 (2009), вып. 11, 145–160.

[5] K. Altmann and J. Hausen. Polyhedral divisors and algebraic torus actions. Math. Ann. 334 (2006), no. 3, 557–607.

[6] I.V. Arzhantsev. Affine embeddings of homogeneous spaces. In "Surveys in Geometry and Number Theory", N. Young (Editor), LMS Lecture Notes Series 338, Cambridge University Press (2007), 1–51.

[7] I.V. Arzhantsev. Flag varieties as equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$. Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), no. 3, 783-786.

[8] I.V. Arzhantsev, D. Celik, and J. Hausen. Factorial algebraic group actions and categorical quotients. arXiv:0908.0443v2 [math.AG] (2009), 11 pp.

[9] I.V. Arzhantsev, U. Derenthal, J. Hausen, and A. Laface. Cox rings. arXiv:1003.4229 [math.AG] (2010), 56 pp.

[10] I.V. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, and M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. arXiv 1011.5375v1 [math.AG] (2010), 41 pp.

[11] I.V. Arzhantsev and S.A. Gaifullin. Homogeneous toric varieties. J. Lie Theory 20 (2010), no. 2, 283–293.

[12] I.V. Arzhantsev and J. Hausen. Geometric Invariant Theory via Cox rings. J. Pure Appl. Algebra 213 (2009), no. 1, 154–172.

[13] I.V. Arzhantsev, K. Kuyumzhiyan, and M. Zaidenberg. Flag varieties, toric varieties, and suspensions: three instances of infinite transitivity. Prepublication de l'Institut Fourier, hal-00463347; arXiv:1003.3164v1 [math.AG] (2010), 25 pp.

[14] I.V. Arzhantsev and A. Liendo. Polyhedral divisors and SL_2-actions on affine T-varieties. In preparation.

[15] I.V. Arzhantsev and E.V. Sharoyko. Hassett-Tschinkel correspondence: modality and projective hypersurfaces. arXiv:0912.1474v2 [math.AG] (2009), 12 pp., условно принята в J. Algebra.

[16] R. Basili and A. Iarrobino. Pairs of commuting nilpotent matrices, and Hilbert function. J. Algebra 320 (2008), no. 3, 1235–1254.

[17] V. Batyrev and F. Haddad. On the geometry of SL(2)-equivariant flips. Moscow Math. J. 8 (2008), 621–646.

[18] M. Demazure. Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 3 (1970), 507–588.

[19] U. Derenthal and D. Loughran. Singular del Pezzo surfaces that are equivariant compactifications. arXiv:0910.2717v.2 [math.AG], 2009, 14 pp.

[20] B. Doran and F. Kirwan. Towards non-reductive geometric invariant theory. Pure Appl. Math. Q. 3 (2007), no. 1, part 3, 61–105.

[21] E. Feigin. $\mathbb{G}_a^M$-degeneration of flag varieties. arXiv:1007.0646v2 [math.AG] (2010) 24 pp.

[22] E. Feigin. Degenerate flag varieties and the median Genocchi numbers. arXiv:1101.1898v2 [math.AG] (2011) 18 pp.

[23] E. Feigin and M. Finkelberg. Degenerate flag varieties of type A: Frobenius splitting and BWB theorem. arXiv:1101.1491v2 [math.AG] (2011) 25 pp.

[24] B. Hassett and Yu. Tschinkel. Geometry of equivariant compactifications of $\mathbb{G}_a^n$. Int. Math. Res. Notices 20 (1999), 1211-1230.

[25] S. Kaliman and M. Zaidenberg. Affine modifications and affine varieties with a very transitive automorphism group. Transform. Groups 4 (1999), 53–95.

[26] A. Liendo. Affine T-varieties of complexity one and locally nilpotent derivations. Transform. Groups 15 (2010), no. 2, 389–425.

[27] A. Liendo. $\mathbb{G}_a$-actions of fiber type on affine T-varieties. J. Algebra 324 (2010), no. 12, 3653–3665.