ПРОЕКТ ИССЛЕДОВАНИЙ

Борисов Денис Иванович

Целью проекта является изучение асимптотических и спектральных свойств эллиптических операторов с различными возмущениями. Планируется рассмотреть квантовые волноводы с частым чередованием краевых условий, задачи в тонких областях и модели волноводов со случайно искривленными границами.

1. Сингулярные возмущения границ квантовых волноводов. В этой части проекта планируется продолжить исследование квантовых волноводов с частым чередованием краевых условий, начатое в работах [1], [2], [3]. Постановка задачи следующая. В качестве области выбирается бесконечная полоса $\Pi := \{(x_1, x_2) : 0 < x_2 < \pi\}$, чья нижняя граница разбивается на два множества:

$$\gamma_\varepsilon := \{x : |x_1 - \varepsilon\pi m| < \varepsilon\eta,\ m \in \mathbb{Z}, x_2 = 0\}, \quad \Gamma_\varepsilon := Ox_1 \setminus \overline{\gamma}_\varepsilon,$$

где $\eta(\varepsilon)$ – некоторая функция, удовлетворяющая неравенству $0 < \eta(\varepsilon) < \pi/2$. Изучаемый оператор – Лапласиан в $L_2(\Pi)$ с краевым условием Неймана на Γ_ε и краевым условием Дирихле на γ_ε. Таким образом, на нижней части границы задается частое периодическое чередование типа краевого условия. Случай $\varepsilon \ln \eta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ был рассмотрен в [1], случай $\varepsilon \ln \eta(\varepsilon) \to -\infty$ – в [2], [3]. Было показано, что первом случае при усреднении чередование краевых условий следует заменить условием Дирихле, во втором – условием Неймана. В проекте предполагается рассмотреть случай $\varepsilon \ln \eta(\varepsilon) \to A$, где A – ненулевая константа. Ожидается, что в этом случае усредненным краевым условием будет третье краевое условие. Планируется изучить сходимость резольвенты возмущённого оператора и доказать соответствующие оценки скорости сходимости. При этом для задач с частым чередованием краевых условий в ограниченных областях известно, что в случае усредненного краевого условия третьего рода невозможна даже сильная резольвентная сходимость. Поэтому в рамках исследования предлагаемой задачи будут активно использоваться дополнительные граничные корректоры, как это уже делалось в работах [2], [3]. За счет использования таких корректоров и планируется описать сходимость резольвенты возмущённого оператора в равномерной операторной норме. Кроме того, будет построено асимптотическое разложение зонных функций, на основе будет описано асимптотическое поведение лакун в существенном спектре рассматриваемого оператора. Для нижнего края существенного спектра будет построено полное асимптотическое разложение. Данное асимптотическое разложение будет построено по двум малым параметрам ε и $\eta(\varepsilon)$. Будет детально исследована структура данного разложения и изучен вопрос о его сходимости.

2. Тонкие области. В рамках проекта будут продолжены исследования задач в тонких областях, ранее начатые в [16]-[20]. А именно, планируется рассмотреть две задачи. Постановка первой из них такова. Пусть $x = (x', x_n)$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ – ограниченная область с гладкой границей, $h_\pm$ – произвольные достаточно гладкие функции, заданные в ω, такие что $(h_- + h_+)$ – неотрицательная функция в ω. Тонкая пластина задаётся равенством $\Omega_\varepsilon := \{(x', x_n) : x' \in \omega, -\varepsilon h_-(x') < x_n < \varepsilon h_+(x')\}$. На границе такой области рассматривается оператор Лапласа-Бельтрами. Целью ставится исследовать вопрос сходимости такого оператора при $\varepsilon \to +0$ в смысле равномерной резольвентной сходимости. Помимо резольвентной сходимости будут построены асимптотические разложения собственных значений и собственных функций возмущённого оператора. На основе полученных разложений будет проанализировано поведение нижнего собственного значения с точки зрения его увеличения/уменьшения при растягивании области Ω_ε.

Вторая задача – о поведении резольвенты тонкого плоского волновода с центрально-симметричными граничными условиями. Волновод задается как плоская полоса $\Omega_\varepsilon := \{x : x_1 \in \mathbb{R}, 0 < x_2 < \varepsilon\}$. Граница волновода разбивается на два множества

$$\Gamma_\varepsilon := \{x : x_1 > -l\varepsilon, x_2 = 0\} \cup \{x : x_1 < l\varepsilon, x_2 = \varepsilon\}, \quad \gamma_\varepsilon := \partial\Omega_\varepsilon \setminus \overline{\Gamma}_\varepsilon. \tag{0.1}$$

В такой области рассматривается Лапласиан с краевым условием Дирихле на γ_ε и условием Неймана на Γ_ε. Цель – описать сходимость резольвенты при уменьшении ширины волновода, то есть, при $\varepsilon \to 0$. При этом вид эффективного (предельного) оператора будет существенного зависеть от значения параметра l. Ожидается, что для почти всех значений параметра l эффективным будет оператор Шредингера на оси с краевым условием Дирихле в нуле. Вместе с тем, существует бесконечная последовательность критических значений параметра l, для которых эффективным будет оператор Шредингера на оси с дельта-потенциалом в нуле, причем константа связи перед дельта-потенциалом будет определяться определенными спектральными характеристиками нижней границы спектра исходного оператора. Помимо выяснения вида предельного оператора, планируется установить скорость сходимости. Сама сходимость будет изучаться в равномерной операторной норме.

3. Операторы со случайными возмущениями. Работы по исследованию операторов Шрёдингера со случайными потенциалами в последнее время интенсивно изучаются и привлекают внимание многих учёных. Здесь основное внимание уделяется изучению поведение спектра таких операторов. А именно, изучается наличие либо отсутствие спектральной локализации (а также динамической локализации) для заданной модели. Наличие спектральной локализации означает, что с вероятностью один рассматриваемый оператор имеет чисто точечный спектр в рассматриваемом спектральном интервале. При этом очень важным свойством является монотонность оператора по случайным переменным, что существенно облегчает исследование моделей. Имеются также работы, где подобные вопросы рассматривались для случайных магнитных полей. В настоящем проекте планируется исследовать принципиально новую модель, в которой случайное возмущение носит геометрический характер. Изучение таких моделей было начато в [21], [22], что было подробно освещено в отчете о проделанной работе за 2010-2011 гг. В настоящем проекте вновь будет рассматриваться модель о случайно искривленном волноводе. Вместе с тем, в геометрию искривления вноситься определенное изменение по сравнению с ранее рассмотренном. Если ранее верхняя граница волновода получалась параллельным переносом по второй переменной, то теперь параллельный перенос делается на фиксированную величину вдоль нормали к нижней границе. В результате волновод получается переменной ширины вдоль поперечной переменной. Столь незначительное изменение геометрии вносит существенные коррективы в изучаемую модель. А именно, такое возмущение оказывается отрицательным, в отличии от положительного в [21], [22]. Поэтому оптимальная конфигурация случайных величин, при которой нижний край достигает минимума, соответствует максимальным значениям случайных величин в отличии от минимальных в [21], [22]. Кроме того, зависимость оператора от случайных величин здесь оказывается существенно сложнее. Если ранее в [21], [22] выпрямления границы с помощью замены переменных приводило к возмущению, квадратичному по случайным величинам, то в настоящем случае аналогичная процедура дает сложную иррациональную зависимость. В силу данного факта анализ существенно более труден по сравнению с [21], [22]. Тем не менее, для описанной более сложной модели вновь планируется получить результаты того же качества, что и в [21], [22]: оценки начальных масштабов на нижнем краю спектра.

В данной части проекта будет рассмотрена еще одна задача. А именно, планируется исследовать вопрос поведения нижней границы спектра в моделях со случайными возмущениями. Для широкого класса линейных эллиптических операторов с периодически распределёнными локализованными возмущениями известно, что спектр таких оператор неслучаен и с вероятностью один совпадает с некоторым фиксированным множеством. Планируется исследовать общий вопрос о поведении нижней границы такого спектра в случае малых случайных возмущений. При этом будет разработана общая схема исследования таких задач, которая, как ожидается, будет давать эффективные ответы о поведении нижней границы спектра. А именно, планируется установить необходимые и достаточные условия сдвига нижней границы спектра вверх либо вниз, а также на асимптотическом уровне описать величину сдвига. В качестве основы такой методики лежит эффективное сочетание теории периодических операторов, асимптотических методов и методов спектральной теории случайных гамильтонианов.

Список литературы

[1] D. Borisov, and G. Cardone. Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions // Journal of Physics A: Mathematics and General. 2009. V. 42. No. 36, 365205 (21pp).

[2] D. Borisov, R. Bunoiu, and G. Cardone. On a waveguide with an infinite number of small windows // Comptes Rendus Mathematique. 2011. V. 349. No. 1-2. P. 53-56.

[3] D. Borisov, R. Bunoiu, and G. Cardone. On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition // Annales Henri Poincare. 2011. V. 11. No. 8. P. 1591-1627.

[4] Д.И. Борисов, Р.Р. Гадыльшин. О Лапласиане с быстро и квазипериодически изменяющимся типом граничных условий // Успехи математических наук. 1998. Т. 53. Вып. 4(322). С. 160.

[5] Д.И. Борисов, Р.Р. Гадыльшин. О спектре Лапласиана с часто меняющимся типом граничных условий // Теоретическая и математическая физика. 1999. Т. 118. No. 3. С. 347-353.

[6] Д.И. Борисов. О двухпараметрической асимптотике в одной краевой задача для Лапласиана // Математические заметки. 2001. Т. 70. No. 4. P. 520-534.

[7] D.I. Borisov. The asymptotics for the eigenelements of the Laplacian in a cylinder with frequently alternating boundary conditions // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Serie IIb. 2001. t. 329. No. 10. P. 717-721.

[8] Д.И. Борисов. Двупараметрические асимптотики собственных чисел Лапласиана с частым чередованием граничных условий // Вестник молодых ученых. Серия прикладная математика и механика. 2002. No. 1. С. 36-52.

[9] Д.И. Борисов. О Лапласиане с часто и непериодически чередующимися граничными условиями // Доклады АН. 2002. Т. 383. No. 4. С. 443-445.

[10] Д.И. Борисов. О краевой задаче в цилиндре с частой сменой типа граничных условий // Математический сборник. 2002. Т. 193. No. 7. С. 37-68.

[11] Д.И. Борисов. О сингулярно возмущённой краевой задаче для Лапласиана в цилиндре // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. No. 8. С. 1071-1078.

[12] D.I. Borisov. On a model boundary value problem for Laplacian with frequently alternating type of boundary condition // Asymptotic Analysis. 2003. V. 35. No. 1. P. 1-26.

[13] Д.И. Борисов. Асимптотики и оценки собственных элементов Лапласиана с частой непериодической сменой граничных условий // Известия РАН. Серия математическая. 2003. Т. 67. No. 6. С. 23-70.

[14] Д.И. Борисов. Асимптотики и оценки скорости сходимости в трёхмерной краевой задаче с частой сменой граничных условий // Сибирский математический журнал. 2004. Т. 45. № 2. С. 274-294.

[15] Д.И. Борисов. О задаче с частым непериодическим чередованием краевых условий на быстро осциллирующих множествах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46. № 2. С. 284-294.

[16] D. Borisov, D. Krejcirik.The effective Hamiltonian for thin layers with non-Hermitian Robin-type boundary conditions // Asymptotic analysis, to appear.

[17] D. Borisov and P. Freitas. Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains // Annales de l'institut Henri Poincare (C) Analyse non-lineaire. 2009. V. 26. No. 2. P. 547-560.

[18] D. Borisov, and P. Freitas. Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in $\mathbb{R}^d$ // Journal of Functional Analysis. 2010. V. 258. No. 3. P. 893-912.

[19] D. Borisov, P. Freitas. Asymptotics for the expected lifetime of Brownian motion on thin domains in $\mathbb{R}^n$ // submitted.

[20] D. Borisov, and G. Cardone. Complete asymptotic expansions for the eigenvalues of the Dirichlet Laplacian in thin three-dimensional rods // ESAIM: Control, Optimisation, and Calculus of Variation, to appear.

[21] D. Borisov, I. Veselic'. Low lying spectrum of weak-disorder quantum waveguides // Journal of Statistical Physics. 2011. V. 142. No. 1. P. 58-77.

[22] D. Borisov, I. Veselic'. Spectral properties of weak-disorder quantum waveguides // Oberwolfach Reports. 2009. V. No. 4. P. 2980-2981.