ПЛАН ИССЛЕДОВАНИЙ на 2011 год

Колесникова П.С.

Объект исследования Конформные алгебры, псевдоалгебры над линейными алгебраическими группами.

Цели и задачи Исследовать вопрос о существовании точного конформного представления у конформной алгебры Ли конечного типа. Описать с точностью до изоморфизма простые и полупростые ассоциативные псевдоалгебры над всеми линейными алгебраическими группами размерности один.

Состояние проблемы

Конформные алгебры [1] представляют собой алгебраические системы, возникающие при формализации свойств коэффициентов сингулярной части операторного разложения произведений полей (operator product expansion, OPE) в двумерной конформной теории поля, основы которой были заложены в [2]. С алгебраической точки зрения, конформные алгебры — это линейные пространства над полем $\Bbbk$ характеристики нуль, снабженные унарной линейной операцией D и “многозначной” билинейной операцией $(\cdot_{(}\lambda)\cdot)$, принимающей на любых двух элементах конечное число значений. Наиболее интересен случай конформных алгебр *конечного типа*, в которых имеется конечное число полей и коэффициенты сингулярной части OPE зависят только от этих полей и их производных. Такие конформные алгебры являются аналогами обычных конечномерных алгебр в псевдотензорной категории, ассоциированной с алгеброй многочленов $H = \Bbbk[D]$ — они являются конечно-порожденными H-модулями.

Структурная теория, теория представлений и когомологий ассоциативных, лиевых и йордановых конформных алгебр и супералгебр конечного типа рассматривалась в ряде работ, например, [3–16].

Одной из фундаментальных нерешенных проблем теории конформных алгебр является вопрос о возможности вложения любой конформной алгебры Ли конечного типа в ассоциативную конформную алгебру, или (более сильное утверждение), о существовании точного конформного представления конечного типа для таких алгебр.

М. Ройтманом ранее было установлено [17], что нильпотентная конформная алгебра Ли вкладывается в ассоциативную нильпотентную конформную алгебру. Для алгебр конечного типа в сочетании с результатом [18] о присоединении единицы к ассоциативным конформным алгебрам это дает положительный ответ на поставленный выше вопрос. Обобщение этого результата было получено в [18], где было показано, что конформная алгебра Ли конечного типа с отщепляющимся разрешимым радикалом, у которой полупростая часть является алгеброй петель, имеет точное представление конечного типа. Положительное решение этого вопроса в общем случае означало бы, что любая вертексная операторная алгебра, порожденная конечным числом полей, может быть представлена матрицами конечного размера над алгеброй дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами (первой алгеброй Вейля).

Обобщение понятия конформной алгебры — псевдоалгебры над алгебрами Хопфа — рассматривались в работах [16, 19–22]. В частности, над всеми кокоммутативными алгебрами Хопфа уже построена структурная теория лиевых псевдоалгебр конечного типа. Эти объекты находят применение к описанию простых линейных алгебр Пуассона [19]. Но один из естественных классов алгебр Хопфа — координатные алгебры алгебраических групп — состоит не только из кокоммутативных алгебр. Для описания псевдоалгебр над такими алгебрами Хопфа (или, для простоты, над такими группами) естественно использовать подход, близкий к языку λ-произведений в конформных алгебрах. Последние представляют собой псевдоалгебры над аффинной прямой. Другой пример связной алгебраической группы размерности один (мультипликативная группа поля) приводит к понятию $\mathbb{Z}$-конформной алгебры в смысле [23].

Ожидаемые результаты Будет показано, что любая конформная алгебра Ли конечного типа с отщепляющимся разрешимым радикалом имеет точное представление конечного типа. Будут описаны простые и полупростые ассоциативные псевдоалгебры конечного типа над всеми (не обязательно связными) линейными алгебраическими группами размерности один.

Литература

1. V. G. Kac, Vertex algebras for beginners, second ed., University Lecture Series 10, AMS, Providence, RI, 1998.
2. A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. B. Zamolodchikov, Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, Nucl. Phys. 241 (1984) 333–380.
3. L. A. Bokut, Y. Fong, W.-F. Ke, Composition-Diamond lemma for associative conformal algebras, J. Algebra 272 (2004) no. 2, 739–774.
4. C. Boyallian, V. G. Kac, J. I. Liberati, On the classification of subalgebras of Cend_N and gc_N, Special issue celebrating the 80th birthday of Robert Steinberg. J. Algebra 260 (2003), no. 1, 32–63.
5. A. D'Andrea, V. G. Kac, Structure theory of finite conformal algebras, Sel. Math., New Ser. **4** (1998) 377–418.
6. A. De Sole, V. G. Kac, Lie conformal algebra cohomology and the variational complex, Comm. Math. Phys. 292 (2009), no. 3, 667–719.
7. D. Fattori, V. G. Kac, Classification of finite simple Lie conformal superalgebras, Special issue in celebration of Claudio Procesi's 60th birthday. J. Algebra 258 (2002), no. 1, 23–59.
8. D. Fattori, V. G. Kac, A. Retakh, Structure theory of finite Lie conformal superalgebras, Lie theory and its applications in physics V, 27–63, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2004.
9. V. G. Kac, M. Lau, A. Pianzola, Differential conformal superalgebras and their forms, Adv. Math. 222 (2009), no. 3, 809–861.
10. V. G. Kac, A. Retakh, Simple Jordan conformal superalgebras, J. Algebra Appl. 7 (2008), no. 4, 517–533.
11. V. G. Kac, M. Lau, A. Pianzola, Differential conformal superalgebras and their forms, Adv. Math. 222 (2009), no. 3, 809–861.
12. M. Roitman, On free conformal and vertex algebras, J. Algebra 217 (1999) no. 2, 496–527.
13. A. Retakh, Associative conformal algebras of linear growth, J. Algebra 237 (2001) no. 2, 769–788.
14. A. Retakh, On associative conformal algebras of linear growth. II, J. Algebra 304 (2006) no. 1, 543–556.
15. M. Roitman, Universal enveloping conformal algebras, Sel. Math., New

Ser., **6** (2000), no. 3, 319–345.
16. V. G. Kac, A. Retakh, Simple Jordan conformal superalgebras, J. Algebra Appl. 7 (2008), no. 4, 517–533.
17. M. Roitman, On embedding of Lie conformal algebras into associative conformal algebras, J. Lie Theory 15 (2005) no. 2, 575–588.
18. P. Kolesnikov, On finite representations of conformal algebras, J. Algebra, 331 (2011), 169-193.
19. B. Bakalov, A. D'Andrea, V. G. Kac, Theory of finite pseudoalgebras, Adv. Math. 162 (2001) no. 1, 1–140.
20. B. Bakalov, A. D'Andrea, V. G. Kac, Irreducible modules over finite simple Lie pseudoalgebras. I. Primitive pseudoalgebras of type W and S, Adv. Math. 204 (2006), no. 1, 278–346.
21. A. Retakh, Unital associative pseudoalgebras and their representations, J. Algebra 277 (2004), no. 2, 769–805.
22. P. Kolesnikov Simple finite Jordan pseudo-algebras, Symmetry, Integrability, and Geometry. Methods and Applications, 5 (2009), 014, 17 pages.
23. M. I. Golenishcheva-Kutuzova, V. G. Kac, Γ-conformal algebras, J. Math. Phys. 39 (1998) no. 4, 2290–2305.