ПЛАН ИССЛЕДОВАНИЯ

представленный на конкурс фонда Саймонса

Универсальные представления алгебры токов многих переменных

Сергей Локтев

Проект, исследования в рамках которого были поддержаны грантом конкурса П.Делиня, был посвящён конечномерным представлениям алгебр токов многих переменных, в основном модулям Вейля.

Модули Вейля для токов одной переменной были определены в работе [CP] как средство для изучения представлений квантовых групп классическими методами. В работе [FL2] (с участием соискателя) определение и часть результатов [CP] были обобщены для алгебры токов на произвольном аффинном многообразии. В этой же работе результаты [H] были применены для вычисления характера и размерности модулей Вейля над токами двух переменных. Работы [FL3] и [FKL] (с участием соискателя) продолжают изучение двумерного случая, а в работе [Ku] исследуются модули Вейля над токами в простейшую особенность - двойную точку кривой.

Таким образом, имеется задача, корректно поставленная для токов произвольной размерности, практически решённая для токов одной переменной и содержательная для двух переменных.

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли. Рассмотрим следующий класс представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[x^1,\dots,x^d]$.

Будем говорить, что представление *максимально* в своём классе, если всякое представление этого класса реализуется как факторпредставление данного. Зафиксируем картановскую и борелевскую подалгебру $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{b}\subset\mathfrak{g}$, положим $\mathfrak{n}=[\mathfrak{b},\mathfrak{b}]\subset\mathfrak{b}$. Пусть задан вес $\lambda:\mathfrak{b}\to\mathfrak{h}\to\mathbb{C}$.

Определение 1. *Назовём* локальным модулем Вейля W_λ *максимальное конечномерное представление, порождённое вектором* v_λ*, таким что*

$$(g\otimes P)v_\lambda=\lambda(g)P(0)v_\lambda \quad \textit{для всех } g\in\mathfrak{b},\ P\in\mathbb{C}[x^1,\dots,x^d].$$

Нетрудно доказать (см. [FL2]), что W_λ корректно определён и отличен от нуля для доминантного λ. Есть у этого представления и бесконечномерный аналог.

Определение 2. *Назовём* глобальным модулем Вейля W_λ^g *максимальное* $\mathfrak{g}\otimes 1$*-интегрируемое представление, порождённое вектором* v_λ*, таким что*

$$(h\otimes 1)v_\lambda=\lambda(h)v_\lambda \quad \textit{для всех } h\in\mathfrak{h},\quad (g\otimes P)v_\lambda=0 \quad \textit{для всех } g\in\mathfrak{n},\ P\in\mathbb{C}[x^1,\dots,x^d].$$

В принципе, вместо $\mathbb{C}[x^1,\dots,x^d]$ можно рассмотреть алгебру функций на любом аффинном многообразии (с выбранной точкой для определения v_λ). Но если эта точка неособа, то определённый таким образом модуль будет изоморфен W_λ.

Определение 3. *Назовём* локальным модулем Вейля W_λ^k уровня k *подпредставление* $W_\lambda^{\otimes k}$*, порождённое* $v_\lambda^{\otimes k}$*. В частности,* $W_\lambda^1=W_\lambda$.

Заметим, что группа GL_d линейных замен переменных, действующая на $\mathbb{C}[x^1,\dots,x^d]$, действует и на модулях Вейля, коммутируя с $\mathfrak{g}\otimes 1$. Тем самым, модули Вейля являются $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}l_d$ — модулями, и, чтобы описать их комбинаторно, естественно рассмотреть характер этого представления $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}l_d$.

Заметная часть поставленных в проекте задач была решена соискателем ([L],[GHL]), также имеются значительные продвижения других исследовательских групп, что отражено в работах [BCGM], [CFK], [N]. В 2011 году соискатель планирует заниматься следующими задачами, органично продолжающими старый проект.

1) **Характеры модулей Вейля и многочлены Макдональда**. Для $d = 1$ и простой $\mathfrak{g}$ с простыми связями в [FoLi] доказан изоморфизм локальных модулей Вейля и аффинных модулей Демазюра уровня 1. При этом в [I] доказано, что характер таких модулей Демазюра получается подстановкой $t = 0$ в многочлен Макдональда. Планируется обобщить этот результат на произвольную $\mathfrak{g}$, использууя фермионные формулы [N] вместо отождествления с модулями Демазюра, а в дальнейшем обобщить этот результат на $A = \mathbb{C}[x, \xi]$, где ξ — нечётная переменная (а алгебру токов следует рассматривать как супералгебру Ли).

2) **Двойственности типа Хау и Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда**. В настоящий момент обнаружены две конструкции известных объектов в терминах модулей Вейля для $d = 1$. Первое — разложение симметрической алгебры $S^*(V \otimes W \otimes \mathbb{C}[t])$, где V и W — векторные представления $\mathfrak{g}l_n$ и $\mathfrak{g}l_m$, в прямую сумму произведений модулей Вейля для $\mathfrak{g}l_n$ и $\mathfrak{g}l_m$. Второе — фильтрация параболических модулей Верма M_λ для $\mathfrak{g}l_n \otimes \mathbb{C}[t]$, присоединённые факторы в которой изоморфны глобальным модулям Вейля W^g_μ, а кратности вхождения W^g_μ в эту фильтрацию совпадают с размерностью изотипической компоненты неприводимого представления $\mathfrak{g}l_n$ старшего веса λ в локальном модуле Вейля W_μ. Планируется обобщить и доказать эти утверждения в максимально возможной общности.

3) **Комбинаторные статистики, описывающие градуировки по степени.** Пусть теперь $d = 2$. В [FKL] строится комбинаторная модель для модулей Вейля произвольного уровня для $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}l_n$ в терминах наборов вложенных диаграмм Юнга. Эта модель описывает действие $\mathfrak{g}l_n \otimes 1$ и градуировку по степени одной из переменных. Недавно обнаружилось, что в эту модели можно описать и градуировку по обеим переменным. Планируется доказать это утверждение и связать его с геометрией схем Гильберта.

4) **Геометрические конструкции с помощью "слияния"представлений.** Из работ [CP], [CL], [FoLi], [Na] известно, что для $d = 1$ локальные модули Вейля могут быть получены "слиянием"[FL1] простейших модулей Вейля. Конструкцию [FL1] можно обобщить и на большее число переменных, но при этом возникает зависимость от параметров. Для слияния векторных представлений $\mathfrak{g}l_n$ при $d = 2$ полученное семейство представлений параметризуется специальным слоем схемы Гильберта, и локальные модули Вейля для $\mathfrak{g}l_n$ и $\lambda = n\omega_1$ могут быть реализованы в сечениях соответствующего расслоения. В общем случае многообразие параметров может быть ещё сложнее. Планируется изучить возможность обобщений этой конструкции.

5) **Конструкции для большего числа переменных.** В [L] имеется гипотеза о размерности и характере локальных модулей Вейля для $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}l_n$ и $d = 3$. Часть информации для $d > 3$ может быть извлечена из недавних гипотез Ф.Бержерона. Хотелось бы построить представления со старшим весом и такими характерами, что даст гипотетичеси точную нижнюю оценку на размерности модулей Вейля.

Список литературы

[BCGM] Matthew Bennett, Vyjayanthi Chari, Jacob Greenstein and Nathan Manning, *On homomorphism between global Weyl modules*, arXiv:1008.5213v2.pdf

[Ch] I. Cherednik, *Double affine Hecke algebras, Knizhnik-Zamolodchikov equations, and Macdonald's operators*, Internat. Math. Res. Notices 1992, no. 9, 171–180.

[CFK] Vyjayanthi Chari, Ghislain Fourier, Tanusree Khandai, *A categorical approach to Weyl modules*, arXiv:0906.2014

[CL] V. Chari, S. Loktev, *Weyl, Demazure and Fusion modules for the current algebra of sl_{r+1}*, math.QA/0502165.

[CP] V. Chari, A. Pressley, *Weyl Modules for Classical and Quantum Affine Algebras*, Represent. Theory 5 (2001), 191–223, math.QA/0004174.

[I] B. Ion, *Nonsymmetric Macdonald polynomials and Demazure characters*, Duke Math. J. Volume 116, Number 2 (2003), 299–318.

[GKV] V. Ginzburg, M. Kapranov, E. Vasserot, *Langlands Reciprocity for Algebraic Surfaces*, Math. Res. Letters 2 (1995), 147-160, math.q-alg/9502013.

[H] M. Haiman, *Vanishing theorems and character formulas for the Hilbert scheme of points in the plane*, Invent. Math. **149** (2002), no. 2, 371-407, math.AG/0201148.

[FL1] Feigin B.L, Loktev S.A., *On generalized Kostka polynomials and the quantum Verlinde rule,* Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. **194** (1999), p. 61–79, math.QA/9812093

[FL2] B. Feigin, S. Loktev, *Multi-dimensional Weyl Modules and Symmetric Functions*, Comm. Math. Phys. **251** (2004), no. **3**, 427–445, math.QA/0212001

[FL3] B. Feigin, S. Loktev, *Deformation of Weyl Modules and Generalized Parking Functions*, International Math. Res. Notes **51** (2004), 2719–2750, math.QA/0312158

[FKL] B. Feigin, A.N. Kirillov, S. Loktev, *Combinatorics and Geometry of Higher Level Weyl Modules*, math.QA/0503315

[FoLi] G. Fourier and P. Littelmann, *Weyl modules, affine Demazure modules, fusion products and limit constructions*, math.RT/0509276

[GHL] Nicolas Guay, David Hernandez, Sergey Loktev, *Double affine Lie algebras and finite groups*, Pacific J. of Math. **243** (2009), no. 1, 1–41 , arXiv:0901.3205

[Ku] T. Kuwabara, *Symmetric coinvariant algebras and local Weyl modules at a double point*, math.RT/0407429

[L] S. Loktev, Weight Multiplicity Polynomials of multi-variable Weyl Modules , Moscow Math. J. , **10** (2010), no. 1, arXiv:0806.0170

[N] H. Nakajima, *Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), no. 1, 145238, math.RT/0308156.

[Na] K.Naoi, *Weyl modules, Demazure modules and nite crystals for non-simply laced type*, arXiv:1012.5480

[PiSt] J. Pitman, R. Stanley, *A polytope related to empirical distributions, plane trees, parking functions, and the associahedron*, Discrete and Computational Geometry **27** (2002), 603–634.

[R] S. E. Rao, *On Representations of Toroidal Lie Algebras*, Proceedings of Functional Analysis VIII held at Dubrovnik, Croatia, in June 2003, math.RT/0503629

[STU] Y. Saito, K. Takemura, D. Uglov, *Toroidal actions on level 1 modules of* $U_q(\hat{sl}_n)$, Transform. Groups **3** (1998), no. 1, 75–102, q-alg/9702024.

[VV] M. Varagnolo, E. Vasserot, *Double-loop algebras and the Fock space*, Invent. Math. **133** (1998), no. 1, 133–159, q-alg/9612035.