План исследований Д. И. Пионтковского

В 2011 году планируется продолжить исследования по следующим двум темам.

1. Градуированные кольца и их приложения.

Одна из тем планируемых исследований – изучение асоциативных градуированных алгебр над полем и категорий модулей над ними. Особое внимание будет уделяться свойству когерентности таких алгебр.

Согласно работам Бондала, Ван ден Берга и Полищука [BVdB, Po], с каждой когерентной градуированной алгеброй можно связать некоммутативную проективную схему, точнее, проективное многообразие. Категория когерентных пучков на таком многообразии есть по определению факторкатегория категории градуированных когерентных модулей над данной алгеброй по категории конечномерных модулей, а сама алгебр играет роль координатного кольца. Такое определение некоммутативной схемы обобщает аналогичное определение М. Артина и Зяня, связанное с нетеровой алгеброй [AZ]. Так, в случае, когда соответствующая алгебра является горенштейновой и имеет конечную глобальную размерность d, многообразие есть некоммутативный аналог проективного пространства P^d. При малых d нетеровы алгебры с таким свойством (алгебры, регулярные по Артину–Шелтеру) были классифицированы в классической работе [AS]. А. Бондал выдвинул в 1990-е гг. гипотезу, что все горенштейновы алгебры конечной глобальной размерности когерентны (тем самым, задают некоммутативные проективные пространства), однако до недавних пор примеры таких когерентных алгебр не были известны.

В [Pi] автором было показано, в подтверждение этой гипотезы, что все горенштейновы алгебры глобальной размерности 2 когерентны. В настоящее время (и эта работа будет продолжена в 2011 году), автором строятся и изучаются примеры таких когерентных алгебр глобальной размерности 3. В частности, доказано существование когерентных, но не нетеровых горенштейновых алгебр глобальной размерности 3: примером может служить алгебра Смита, связанная с плоскостью Фано, [S], а также некоторые из алгебр Бокландта [B]. Алгебры из этих примеров являются алгебрами Калаби–Яу, т. е. категории конечномерных модулей над ними являются категорияи Калаби–Яу. Предполагается исследовать эти и другие примеры горенштейновых алгебр глобальной размерности 3, уделяя особое мнимание алгебрам Калаби–Яу. Если такая алгебра когерентна, то категория когерентных пучков соответствующего некоммутативного многообразия также является категорией Калаби–Яу. Тем самым, обнаружение новых примеров когерентных среди таких алгебр дает конструкции новых категорий Калаби–Яу,которые можно назвать некоммутативными проективными плоскостями Калаби–Яу. Построение таких примеров и исследование получившихся категорий — одна из тем планируемых в 2011 году исследований.

2. Конечно определенные операды.

Вторая тема планируемых исследований — изучение производящих функций операд.

Как известно, многие результаты и конструкции в терии операд (особенно симметрических операд над полем нулевой характеристики) имеют аналоги в теории градуированных ассоциативных алгебр. В частности, производящая функция операды (экспоненциальная в случае симметрической операды и обычная — для не симметрической) аналогична ряду Гильберта алгебры.

Ряды Гильберта ряда важных классов конечно определенных алгебр (в частности, коммутативных алгебр, а также алгебр с конечным базисом Гребнера) являются рациональными функциями [U]. Упомянутая аналогия позволяет предположить, что производящие функции операд, удовлетворяющим некоторым дополнительным ограничениям, являются алгебраическими в случае несимметрических операд и дифференциально алгебраическими (т. е. удовлетворяют некоторому линейному дифференциальному уравнению с алгебраическими коэффициентами) — в случае симметрических. В частности, этими свойствами обладают производящие функции операд, задающих коммутивные, ассоциативные, лиевы алгебры, а также ряд других. Ранее автором такое свойство было установлено еще для некоторых классов операд с конечным базисом Гребнера (базисы Гребнера для операд введены Доценко и Хорошкиным в [DK]). В 2011 году предполагается продолжить эти исследования, в частности, установить описанное свойство производящей функции для всех или хотя бы наиболее важных классов операд с конечным базисом Гребнера.

Список литературы

[AS] M. Artin and W.F. Schelter, *Graded algebras of global dimension 3,* Adv. Math., **66** (1987), p. 171–216

[AZ] M. Artin, J. J. Zhang, *Noncommutative projective schemes,* Adv. Math., **109** (1994), 2, p. 228–287

[B] R. Bocklandt, *Graded Calabi Yau algebras of dimension 3*, J. Pure Appl. Algebra, **212** (2008), no. 1, p. 14–32

[BVdB] A. Bondal, M. Van den Bergh, *Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry,* Mosc. Math. J., **3** (2003), 1, p. 1–36, 258

[DK] V. Dotsenko, A. Khoroshkin, *Groebner bases for operads*, Duke Math. J., **153** (2010), 2, p. 363-?396

[Pi] *Coherent algebras and noncommutative projective lines,* Journal of Algebra, **319** (2008), p. 3280-3290

[Po] A. Polishchuk, *Noncommutative proj and coherent algebras*, Math. Res. Lett., **12** (2005), 1, p. 63–74

[S] S. Paul Smith, *A 3-Calabi–Yau algebra with G_2 symmetry constructed from the octonions*, arXiv:1104.3824 (2011)

[U] В. А. Уфнаровский, *Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре*, Современная математика и её приложения, **57** (1990), с. 5–177