План исследования (Research Statement). Савин А.Ю.

Предлагаемый проект посвящен некоторым актуальным задачам теории нелокальных эллиптических операторов, ассоциированных с диффеоморфизмом гладкого замкнутого многообразия.

1. Для диффеоморфизма $g : M \to M$ гладкого замкнутого многообразия M рассматривается класс нелокальных операторов вида конечной суммы

$$D = \sum_k D_k T^k : H^s(M) \to H^{s-d}(M), \tag{1}$$

где D_k — некоторые дифференциальные операторы порядков $\le d$ на многообразии, $(Tu)(x) = u(g(x))$ — оператор сдвига (замена переменных), отвечающий диффеоморфизму g, а $H^s(M)$ — пространство Соболева с показателем гладкости s. Операторы такого типа интенсивно изучались многими авторами (см., напр., [1–4] и цитированную литературу). В частности, известно понятие символа, и при весьма общих предположениях установлена теорема конечности (фредгольмовости) для таких операторов. Здесь надо отметить существенное отличие эллиптической теории нелокальных операторов от классической эллиптической теории: оператор (1) может быть фредгольмов не во всей шкале пространств Соболева H^s, а только для некоторых значений показателя гладкости s, в то время как в классической теории оператор фредгольмов (или не фредгольмов) для всех значений показателя гладкости одновременно. Это явление было известно достаточно давно, однако детально не исследовалось. В частности, не исследовался вопрос: зависит ли индекс оператора (1) от s?

Центральной задачей в эллиптической теории является проблема индекса — задача о вычислении индекса оператора в топологических терминах, т.е. в терминах символа оператора и топологических инвариантов многообразия, на котором оператор рассматривается. Для нелокальных операторов формулы индекса были получены (см. [2,5,6]) в предположении, что диффеоморфизм является изометрией. В этом случае ключевую роль в построении топологических инвариантов и соответствующих формул индекса играет то обстоятельство, что изометрический диффеоморфизм вкладывается в компактную группу Ли диффеоморфизмов, по которой затем можно проводить усреднение. В общем случае (т.е. для неизометрического диффеоморфизма) объемлющей компактной группы нет и проблема индекса является открытой. Более того, не известно даже гипотетической формулы индекса.

2. В настоящем проекте предполагается исследовать разрешимость нелокальных операторов вида (1) во всей шкале пространств Соболева по крайней мере в случае простейших неизометрических диффеоморфизмов, например, диффеоморфизмов типа растяжений-сжатий (для изометрических диффеоморфизмов оператор фредгольмов или не фредгольмов при всех s одновременно). Надо дать явное описание множества показателей гладкости s, для которых данный оператор эллиптичен. Также надо исследовать зависимость индекса от s.

В этом проекте предполагается также получить новые формулы индекса эллиптических операторов для неизометрических диффеоморфизмов. Здесь главная проблема состоит в предъявлении нужных топологических инвариантов многообразия и символа эллиптического оператора. Предполагается построить эти инварианты (характер Черна символа и класс Тодда многообразия), по крайней мере, в случае диффеоморфизмов с простым поведением орбит. Например, для диффеоморфизмов, отвечающих действию элементов комплексного тора на гладком торическом многообразии [7]. Отметим, что символ оператора (1) является элементом существенно некоммутативной алгебры (а именно, скрещенного произведения) поэтому для построения характера Черна символа естественно привлечь методы некоммутативной геометрии. Далее, при доказательстве соответствующих формул индекса предполагается использовать полученную недавно в [8] редукцию произвольного эллиптического оператора вида (1) к некоторому псевдодифференциальному оператору на специальном гладком замкнутом многообразии — торе многообразия M, скрученном при помощи диффеоморфизма g.

Список литературы

[1] T. Carleman. Sur la théorie des équations intégrales et ses applications. 1932, 138–151. Verh. Internat. Math.-Kongr. Zurich. 1.

[2] A. Connes. *Noncommutative geometry.* Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994.

[3] A. Antonevich and A. Lebedev. *Functional-Differential Equations. I. C^*-Theory.* Number 70 in Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Longman, Harlow, 1994.

[4] A.L. Skubachevskii. *Elliptic functional differential equations and applications.* Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1997.

[5] А. Б. Антоневич. Эллиптические псевдодифференциальные операторы с конечной группой сдвигов. *Изв. АН СССР, сер. мат.*, **37**, No. 3, 1973, 663–675.

[6] V. E. Nazaikinskii, A. Yu. Savin, and B. Yu. Sternin. *Elliptic theory and noncommutative geometry*, volume 183 of *Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.

[7] В. И. Данилов. Геометрия торических многообразий. *Успехи матем. наук*, **33**, No. 2, 1978, 85–134.

[8] А. Ю. Савин. Об индексе эллиптических операторов, ассоциированных с диффеоморфизмом многообразия. *Доклады академии наук*, **435**, No. 2, 2010, 170–172.