

Разрезания прямоугольников, случайные блуждания и электрические цепи

Михаил Скопенков

В курсе планируется доказать следующие классические результаты, а также некоторые их современные обобщения:

Теорема Дена. Если прямоугольник разрезан на квадраты, не обязательно равные, то отношение длин его перпендикулярных сторон рационально.

Теорема Пойа. Если человек случайным образом перемещается по 2-мерной решетке, то он вернется в начальную точку с вероятностью 1. Если же он перемещается по 3-мерной решетке, то вероятность его возвращения строго меньше 1.

Теорема Куранта-Фридрихса-Леви. На границе единичного квадрата задана кусочно-линейная функция T . На узлах квадратной решетки с шагом $1/2^N$ задана функция T_N , значение которой в каждом узле внутри квадрата равно среднему арифметическому ее значений в соседних узлах, а в каждом узле на границе равно функции T . Тогда при неограниченном увеличении числа N функции T_N стремятся к некоторой функции.

Доказательства основаны на замечательной физической интерпретации, использующей электрические цепи. Материал будет изучаться в виде решения задач участниками, с подробными указаниями и последующим разбором на занятии. Решения большинства задач первых занятий доступно школьникам. Никаких специальных знаний физики не требуется. Будут предложены красивые задачи для исследования.

Примерная программа.

1. Определение случайного блуждания. Определение электрической цепи. Физическая интерпретация вероятности достижения. Возвратность случайного блуждания по 1-мерной решетке.

2. Существование и единственность потенциала в электрической цепи. Принцип максимума. Проводимость и ее вероятностный смысл. Сохранение энергии. Вариационный принцип. Принцип разрезания и склейки. Проводимость между центром и границей квадратной решетки $n \times n$. Возвратность случайного блуждания по 2-мерной решетке.

3. Проводимости деревьев. Невозвратность случайного блуждания по 3-мерной решетке.

4. Физическая интерпретация разрезания прямоугольника на квадраты. Теорема Дена о разрезании прямоугольника.

5.* Электрические цепи переменного тока. Теорема Ласковича-Ринна-Секереша-Фрайлинга о разрезании квадрата на подобные прямоугольники.

E-mail address: skopenkov@rambler.ru

6. Проводимость правильных графов. Бесконечные электрические цепи. Проводимость между соседними узлами квадратной решетки.

7. Компьютерное моделирование распределения температуры по пластине. Существование и единственность распределения температуры на решетке. Ограниченность энергии при измельчении решетки. Сходимость температуры при измельчении решетки.

8.* Дискретные аналитические функции на четырехугольных решетках. Существование и единственность дискретной гармонической функции с заданными граничными значениями. Сходимость дискретных гармонических функций к гармоническим при измельчении решетки.

Литература

1. М. Скопенков, В. Смыкалов, А. Устинов, Случайные блуждания и электрические цепи, Математическое Просвещение, 3-я серия **16** (2012), 25–47, <http://www.mccme.ru/free-books/matprosh.html>.

2. М. Скопенков, М. Прасолов, С. Дориченко, Разрезания металлического прямоугольника, Квант **3** (2011), 10–16, <http://arxiv.org/abs/1011.3180>.
