Специальный курс

Комплексная теория дифференциальных уравнений

Савин А.Ю., Стернин Б.Ю.

Цель данного спецкурса — дать введение в многообещающую область математики — комплексную теорию дифференциальных уравнений, т.е. теорию дифференциальных уравнений на комплексном многообразии (основы этой теории были заложены в замечательных работах Жана Лере по комплексной задаче Коши).

Опишем основные черты данной теории.

Во-первых, простые примеры показывают, что решения дифференциальных уравнений являются, как правило, ветвящимися функциями и, следовательно, имеют особенности в окрестности точек ветвления.

Во-вторых, надо дать метод решения задач. Разумеется, в первую очередь надо рассматривать дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Аппарат решения таких задач хорошо известен в вещественной теории дифференциальных уравнений: это преобразование Фурье. В комплексной теории такое преобразование было построено Стерниным и Шаталовым. Разумеется, это преобразование является ключевым понятием комплексной теории.

Преобразование Стернина и Шаталова позволяет дать явную формулу для решений уравнений с постоянными коэффициентами, а также даёт возможность качественного (асимптотического) исследования уравнений с переменными коэффициентами.

Замечательным образом также оказывается, что комплексная теория дифференциальных уравнений имеет глубокие применения к "вещественной" теории. В первую очередь, это относится к проблеме *продолжения* решений эллиптических уравнений. В частности, методы, которые описываются в курсе, позволяют решать следующие важные проблемы: задачу Пуанкаре о "заметании заряда внутрь", проблему оптимального синтеза антенн, исследование вычислительных алгоритмов электродинамики, задачи геофизики и др.

Спецкурс рекомендован для 3-5 курсов.

Программа

1. Вычеты Лере. Определения вычетов Лере. Точные последовательности Лере и формула вычетов.

2. Ветвящиеся интегралы. Почему интегралы ветвятся? Общая теория. Многообразие Ландау. Интегралы по относительным циклам.

3. Асимптотика ветвящихся интегралов. Ветвление циклов вокруг многообразия Ландау (теорема Пикара–Лефшеца). Теорема Лере об асимптотике.

4. Основное интегральное преобразование. Определение преобразования. Ветвящиеся классы гомологий.

5. Свойства преобразования. Преобразование в функциональных пространствах. Обратное преобразование. Коммутационные соотношения. Описание множества особенностей.

6. Задача Коши для уравнений с постоянными коэффициентами. Постановка задачи. Решение задачи Коши.

7. Особенности решения задачи Коши. Описание особенностей. Особенности в случае, когда начальное многообразие стратифицировано.

8. Задача Коши для уравнений с переменными коэффициентами. Униформизация Лере. Теорема об униформизации. Распространение особенностей. Асимптотика Лере.

9. Приложения теории. Задача о заметании заряда. Постановка задачи. Решение задачи. Примеры.

10. Приложения теории. Задача о материнском теле. Постановка задачи. Функция Шварца. Алгоритм построения материнского тела.

Литература.

1. B. Sternin, V. Shatalov. Differential equations on complex manifolds. Kluwer. 1994.
2. Ж. Лере. Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии. М. Мир. 1961.
3. Ф. Фам. Введение в топологическое исследование особенностей Ландау. М. Мир. 1970