

Алгебра, первый семестр

Е. Ю. Смирнов

осень 2016/2017 г.

1 Группы и кольца

1. Группы. Гомоморфизмы групп, подгруппы, нормальные подгруппы, факторгруппы. Действие группы на множестве, орбиты, стабилизаторы. Группа перестановок.
2. Кольца и поля. Гомоморфизмы колец. Кольца вычетов. Малая теорема Ферма. Китайская теорема об остатках для колец вычетов.
3. Идеалы, факторкольца, теорема о гомоморфизме. Евклидовы кольца, кольца главных идеалов, связь между ними. Взаимная простота, НОД, ассоциированные элементы. Китайская теорема об остатках для колец главных идеалов.
4. Факториальные кольца. Простота и неприводимость. Связь между простотой и неприводимостью элементов и факториальностью кольца. Факториальность целостных колец главных идеалов. Многочлены. Лемма Гаусса.
5. Факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом. Основная теорема о симметрических многочленах.

2 Векторные пространства

1. Векторные пространства. Примеры. n -мерное арифметическое пространство. Линейная зависимость и независимость. Базис, размерность. Двойственное пространство.

2. Линейные отображения. Изоморфизм. Базис как изоморфизм с арифметическим пространством. Двойственное пространство. Изоморфизм конечномерного пространства и дважды двойственного к нему. Аннулятор векторного пространства. Прямая сумма пространств. Факторпространство.
3. Матрица линейного отображения. Произведение матриц. Линейные операторы. Грассмановы многочлены. Определитель. Определитель композиции операторов равен произведению определителей.
4. Перестановки. Знак перестановки. Внешние степени оператора. Миноры как матричные элементы внешней степени оператора. Формула для определителя. Разложение определителя по столбцу, по строке.
5. Кососимметричные полилинейные формы. Связь с определителем. Собственные векторы оператора. Диагонализуемый оператор. Теорема Гамильтона–Кэли.

3 Модули

1. Модуль над кольцом. Примеры. Векторное пространство с оператором как $k[t]$ -модуль. Гомоморфизмы модулей. Система порождающих, базис. Свободный модуль, ранг свободного модуля. Модули над кольцами главных идеалов. Подмодуль свободного модуля свободен. Теорема о взаимных базисах.
2. Теорема о структуре конечнопорождённых модулей над кольцами главных идеалов. Теорема о структуре конечнопорождённых абелевых групп. Жорданова нормальная форма и жорданов базис оператора. Теорема о жордановой нормальной форме.
3. Результант и дискриминант.