

Алексей Елагин планирует осенью 2017 года прочитать в НМУ курс Алгебра-1 по примерной программе

1. Многочлены

- (a) Многочлены, степень, деление с остатком. Теорема Безу. НОД, алгоритм Евклида для многочленов. Неприводимые многочлены. Единственность разложения на простые множители.
- (b) Лемма Гаусса. Единственность разложения для целых коэффициентов или нескольких переменных. Критерий Эйзенштейна.
- (c) Основная теорема алгебры. Неприводимые многочлены над \mathbb{R} и \mathbb{C} .
- (d) Симметрические многочлены. Основная теорема.

2. Общая алгебра

- (a) Кольца, поля. Идеалы (левые, правые, двусторонние), их сумма, пересечение. Делители нуля. Факторкольцо. Гомоморфизмы колец. Теорема о гомоморфизме.
- (b) Китайская теорема об остатках для взаимно простых идеалов. Случай кольца целых чисел. Случай кольца многочленов. Интерполяция.
- (c) Модули. Свободные модули. Пересечение и сумма подмодулей. Прямая сумма модулей. Гомоморфизмы. Циклические модули.
- (d) Коммутативные кольца. Главные идеалы. Простые и максимальные идеалы, факторы по ним.
- (e) Конечно порождённые модули над евклидовыми кольцами. Приведение матрицы соотношений к диагональному виду.

3. Арифметика

- (a) Алгоритм Евклида и ОТА. Наибольший общий делитель.
- (b) Евклидовы кольца. Простые и обратимые элементы. ОТА в евклидовых кольцах. Кольца главных идеалов. Факториальные кольца.
- (c) Арифметика остатков. Группы обратимых элементов, цикличность мультипликативной группы поля.
- (d) Гауссовы числа. Простые гауссовы и простые целые.
- (e) Квадратичные вычеты. Символ Лежандра. Разложение целых чисел в суммы квадратов. Простые в целых и гауссовых числах.
- (f) p -адические числа. Пополнение. Лемма Гензеля.

4. Теория групп

- (a) Группы перестановок. Циклы, транспозиции, чётность. Беспорядки. Порядок перестановки. Сопряжение. Разложение в циклы.
- (b) Группы. Подгруппы. Смежные классы, индекс. Теорема Лагранжа. Нормальные подгруппы. Факторгруппа.
- (c) Действие группы на множестве. Орбиты, стабилизаторы. Группы преобразований.
- (d) Порядок элемента. Циклические группы. Их подгруппы и порождающие.
- (e) Конечнопорождённые абелевы группы, две структурные теоремы. Свободные абелевы группы.
- (f) Свободные группы, задание групп порождающими и соотношениями.

5. Линейная алгебра

- (a) Системы линейных уравнений, метод Гаусса, элементарные преобразования, ступенчатая форма, пространство решений.
- (b) Матрицы, алгебраические операции с ними, элементарные преобразования. Умножение на вектор.
- (c) Векторные пространства, координатное пространство, линейная зависимость, базис, размерность. Подпространства, их сумма и пересечение.
- (d) Линейные отображения, их матрицы. Ядро, образ, ранг отображения. Обратимость отображения.
- (e) Двойственное пространство, невырожденные спаривания. Сопряжённое линейное отображение. Двойственный базис.
- (f) Определитель матрицы. Явная формула и определение через свойства. Определитель произведения. Разложение по строке и по столбцу. Миноры, алгебраические дополнения.
- (g) Результант и дискриминант.
- (h) Обратная матрица, её вычисление. Правило Крамера.
- (i) Операторы. Собственные векторы и значения. Диагонализуемые операторы. Характеристический многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли. Корневые подпространства. Нормальная форма Жордана.
- (j) Билинейные и квадратичные формы. Симметрические и кососимметрические билинейные формы. Поведение матрицы при замене базиса. Ортогонализация Грама-Шмидта. Квадратичные формы над \mathbb{R} , сигнатура, положительная определённость, критерий Сильвестра.