Классификация зацеплений
спецкурс проф. А.Б. Скопенкова

Аннотация

Изучение зацеплений восходит к древности. Первые математические результаты получены К.Ф. Гауссом для нужд электродинамики. В ходе бурного развития топологии в 20м веке было получено много интересных результатов о зацеплениях. В частности, были обнаружены связи с комбинаторикой и компьютерной наукой. Сейчас изучение зацеплений переживает новый расцвет.

Основное содержание курса — необходимое для изучения зацеплений *алгоритмически мотивированное введение в алгебраическую топологию.* Венец курса — простые доказательства красивых классических результатов: нерасцепляемости колец Борромео, простейших результатов рамсеевской теории зацеплений, классификации оснащеных зацеплений, классификации зацеплений в коразмерности 3. Из огромного материала по зацеплениям я отобрал то, что подводит к полной классификации зацеплений. Поэтому большая часть курса посвящена многомерным зацеплениям.

Все необходимые определения будут даны. Основные идеи будут представлены на 'олимпиадных' примерах: размерности не выше 3, на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением к необходимому минимуму алгебраического языка. Поэтому для изучения курса не нужно предварительных знаний, но при этом курс содержит красивые сложные результаты и интересные задачи для исследования.

Каждое следующее занятие будет рассчитано на тех, кто решил простые задачи на понимание предыдущего. Курс будет разбит на два модуля, за каждый из которых можно получить половину кредита, а второй из которых рассчитан на тех, кто сдал первый.

Литература

[MA] `http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/High_codimension_links`

[Pr04] В. В. Прасолов, Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии, Москва, МЦНМО, 2004. `http://www.mccme.ru/prasolov` п. 18.5

[Sk] А. Скопенков, Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, `http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf`, §3

[Sk15] А. Скопенков, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, Москва, МЦНМО, 2015, `http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf`, п. 1.3 и 14.5.

[SS] A. Skopenkov. Realizability of hypergraphs and Ramsey link theory. `http://arxiv.org/abs/1402.0658`, §4

Примерная программа (некоторые первые или некоторые последние пункты будут опущены в зависимости от уровня и желания слушателей)

1. Зацепленность треугольников в пространстве. Линейная теорема Конвея-Гордона-Закса. [SS, §4]

2. Индекс пересечения ломаных на плоскости. Зацепленность точек и окружностей на плоскости. Алгоритм распознавания. [Sk15, п. 1.3]

3. Зацепленность по модулю 2 ломаных в пространстве. Коэффициент зацепления ломаных в пространстве. Алгоритм вычисления. [Sk, п. 3.1, 3.2]

4. Кольца Борромео и коммутаторы. Число Масси-Милнора по модулю 2. Числа Масси-Милнора и Сато-Левина. Алгоритмы вычисления. [Sk, п. 3.3-3.5]

5. Классификация оснащеных зацеплений в трехмерном пространстве. Конструкция Понтрягина. [Pr04, п. 18.5]

6. Зацепленность в многомерном пространстве. [Sk, п. 3.6 и 3.7]

7. Классификация оснащеных зацеплений в многомерном пространстве. [Pr04, п. 18.5]

8. Конструкция Зимана многомерных зацеплений. Коэффициент зацепления для многомерных зацеплений. Классификация зацеплений в метастабильной размерности. [MA, §§1-4]

9. Примеры неполноты коэффициента зацепления ниже метастабильной размерности. Бета-инвариант. Классификация зацеплений в ‘2-метастабильной’ размерности. [MA, §§5-6]

10. ‘Теоретическая’ классификация зацеплений в коразмерности 3. ‘Практическая’ рациональная классификация. [MA, §7]

11. Форма зацеплений трехмерного многообразия. Применение: нереализуемость трехмерных многообразий в четырехмерном пространстве. [Sk15, п. 1.3]