

АЛГЕБРА, ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

Программа курса

0. Вводные сюжеты

- 0.0. Системы линейных уравнений с двумя неизвестными
- 0.1. Уравнения третьей и четвёртой степени с одной неизвестной
- 0.2. Обобщение: системы полиномиальных уравнений
- 0.3. Что требуется от коэффициентов и от компонент решений?
- 0.4. Полукольца, кольца, поля, тела.
- 0.5. О десятой проблеме Гильберта.

1. Категорный язык в алгебре

- 1.0. Категории
- 1.1. Категория множеств
- 1.2. Малые категории
- 1.3. Категории SET ; MON , GRP , AB ; $RING$, ANN
- 1.4. Изоморфизмы
- 1.5. Моноиды эндоморфизмов и группы автоморфизмов
- 1.6. Начальные и конечные объекты
- 1.7. Прямые суммы и прямые произведения
- 1.8. Умеренные категории
- 1.9. Классификационные задачи алгебры
- 1.10. Функторы и кофункторы
- 1.11. Вложения категорий, забывающие функторы
- 1.12. Представимые функторы
- 1.13. Функторы точек
- 1.14. Нестандартные примеры: кольца с композицией, тернары

2. Группы -1

- 2.0. Перечисление малых групп, таблицы Кэли
- 2.1. Подгруппы, классы смежности, теорема Лагранжа

- 2.2. Циклическая подгруппа, порождённая элементом
- 2.3. Нормальные подгруппы и фактор-группы
- 2.4. Прямые и полупрямые произведения групп
- 2.5. Точные последовательности групп
- 2.6. Расширения групп
- 2.7. Простые группы
- 2.8. Свободные группы
- 2.9. Задание групп образующими и соотношениями
- 2.10. Свободные произведения групп
- 2.11*. Фундаментальные группы пунктированных топологических пространств
- 2.12*. Фундаментальные группы букетов топологических пространств

3. Действия групп на множествах -1

- 3.0. Определения. Стационарные группы и орбиты.
- 3.1. Группы перестановок. Знак перестановки.
- 3.2. Формула орбит и её применения
- 3.3. Группы автоморфизмов в геометрии
- 3.4. 3-транзитивные и 2-транзитивные группы
- 3.5. Группы, порождённые парами перестановок
- 3.6. Категории G -множеств и G -модулей

4. Кольца-1

- 4.0. Кольцоиды и идеалы в них
- 4.1. Операции над идеалами
- 4.2. Идеалы и эпиморфизмы колец; фактор-кольца
- 4.3. Простые и максимальные идеалы; целостные кольца
- 4.4. Произведения колец
- 4.5. Делители нуля и нильпотенты
- 4.6. Конечные кольца и поля
- 4.7. Присоединение переменных
- 4.8. Кольца многочленов, формальных рядов и рядов Лорана
- 4.9. Кольца главных идеалов и делимость в них
- 4.10. Разложение идеалов в пересечение примарных
- 4.11. Мультипликативные множества и локализация

- 4.12. Поле частных целостного кольца
- 4.13*. Кольца непрерывных функций
- 4.14. Системы полиномиальных уравнений и функтор точек

5. Поля -1

- 5.0. Характеристика поля. Минимальные поля.
- 5.1. Конечные поля
- 5.2. Автоморфизмы поля
- 5.3. Расширения Галуа
- 5.4. Основная теорема теории Галуа
- 5.5. Пример: $S_n \simeq \text{Aut}_{\mathbb{k}} \mathbb{k}(x_1, \dots, x_n)$
- 5.6. Симметрические функции

6. Векторные пространства и модули

- 6.0. Определения.
- 6.1. Размерность и базис векторного пространства.
- 6.2. Координатное пространство
- 6.3. Классификация конечномерных векторных пространств
- 6.4. Морфизмы модулей
- 6.5. Матрица линейного отображения
- 6.6. Размерность образа и ранг матрицы
- 6.7. Сопряжённое пространство
- 6.8. Модули над кольцами главных идеалов
- 6.9. Конечнопорождённые абелевы группы

7. Алгебры

- 7.0. Определения
- 7.1. Коммутативные и ассоциативные алгебры
- 7.2. Алгебры Ли
- 7.3. Алгебры $\text{End}_{\mathbb{k}}(V)$ и $\text{Mat}_n(\mathbb{k})$
- 7.4. След эндоморфизма
- 7.5. Тензорная алгебра векторного пространства
- 7.6. Симметрическая алгебра векторного пространства
- 7.7. Внешняя алгебра векторного пространства
- 7.8. Действие эндоморфизмов на внешней алгебре
- 7.9. Определитель
- 7.10. Обратимость матриц

8. Системы линейных уравнений

8.0. Сведение системы к матричному уравнению

8.1. Размерность пространства решений и ранг матрицы

8.2. Правило Крамера

8.3. Теорема Кронекера-Капелли

9. Разрешимость уравнений в радикалах

9.0. Разрешимые уравнения и циклические расширения полей

9.1. Разрешимость групп S_3 и S_4

9.2. Снова корни уравнений 3-й и 4-й степени

Г.Б. Шабат