

Кратные пересечения в геометрической топологии, топологической комбинаторике и комбинаторной геометрии спецкурс проф. А.Б. Скопенкова

Примерная программа (несколько первых или несколько последних пунктов будут пропущены в зависимости от возможности и желания участников курса)

1. Число пересечения для ломаных на плоскости [S, §1.3]. Число пересечения для циклов дополнительной размерности в d -мерном пространстве [S14, §4.5, §5].
2. Теорема Конвея-Гордона-Закса. Рамсеевская теория зацеплений. [S14, §2.2, §4]
3. Линейные вложения двумерных гиперграфов (симплициальных комплексов) на языке систем точек. Примеры двумерных гиперграфов, не реализуемых в четырехмерном пространстве: полный двумерный гиперграф на 7 вершинах (т.е. двумерный остов 6-симплекса) и декартово произведение $K_5 \times K_5$ (решение проблемы Менгера). [S14, §§2, 4, 5]
4. Определения гиперграфа (симплициального комплекса), линейного и кусочно-линейного вложений в d -мерное пространство. Теорема общего положения. [S, §5]
5. Вложимость двумерных гиперграфов: критерии планарности (Куратовский и Халин-Юнг), примеры для трехмерного и четырехмерного пространства, Формулировки алгоритмических и NP-трудных результатов (Матушек-Седгвик-Танцер-Вагнер). [S, §5]
6. Алгоритм Ван Кампена распознавания планарности графов и вложимости k -мерных гиперграфов в d -мерное пространство для $d = 2k \geq 6$ [S, §§1.2.3, 1.5, 5].
7. Конфигурационные пространства и планарность [S, §7.8.1]. Препятствие к вложимости в терминах конфигурационных пространств. Полиномиальный алгоритм Хефлигера-Вебера распознавания вложимости k -мерных гиперграфов в d -мерное пространство для $2d \geq 3k + 3$ (только формулировка). [S08, §5]
8. Линейные теоремы Радона и Тверберга. [S, §2.1, §5.9.1]
9. Топологическая теорема Радона [S, §2.2, §5.9.3]
10. Топологическая гипотеза Тверберга. Отображения без r -кратных точек и почти r -вложения. Редукции топологической гипотезы Тверберга к маломерным остовам и к «крайней» размерности). [S, §5.9.4], [S18]
11. План доказательства контрпримера к топологической гипотезе Тверберга в случае, когда r — не степень простого. [S18]
- 12.* Доказательство топологической теоремы Тверберга для r простого [S, §2.3, S18].
- 13.* Препятствия ван Кампена к наличию отображений без r -кратных точек. Теорема Езайдына о его тривиальности при r — не степени простого (формулировка). [S, §2.4, §5.9.5]
- 14.* Построение колец Борромео при помощи тора и коммутатора. Простое доказательство леммы о кольцах Борромео. [S, §4.4, §4.5]
- 15.* Пример Фридмана-Крушкаля-Тайхнера неполноты препятствия Ван Кампена к вложимости двумерных гиперграфов в четырехмерное пространство. Обобщение: построение двумерного гиперграфа P_f по формуле f для булевой функции. Часть доказательства NP-трудности распознавания вложимости двумерных гиперграфов в четырехмерное пространство. [S, §5]

Литература

[S08] A. Skopenkov. Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, London Math. Soc. Lect. Notes, 347 (2008) 248–342. arXiv:math/0604045.

[S14] A. Skopenkov. Realizability of hypergraphs and Ramsey link theory. arXiv:1402.0658.

[S18] А. Б. Скопенков, Топологическая гипотеза Тверберга, УМН, 73:2 (2018), 344–377. arXiv:1605.05141.

[S] А. Б. Скопенков, Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, <https://www.mscme.ru/circles/oim/algorg.pdf>