

Группы и алгебры Ли

Е. Ю. Смирнов

Программа курса, предлагаемого для чтения в НМУ осенью 2018 г.

Программа курса

1. Группы Ли. Определение, примеры. Подгруппы Ли. Смежные классы, факторгруппы. Действие групп Ли на многообразиях. Орбиты, однородные пространства. Классические группы.
2. Алгебры Ли. Касательное пространство к группе Ли. Экспоненциальное отображение. Коммутатор. Тождество Якоби и определение алгебры Ли. Подалгебры, идеалы. Алгебра Ли векторных полей. Примеры.
3. Представления групп и алгебр Ли. Определение. Операции над представлениями: прямая сумма, тензорное произведение. Полная приводимость унитаризуемых представлений. Представления конечных групп. Характеры, ортогональность, теорема Петера-Вейля. Мера Хаара на компактных группах Ли. Представления $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.
4. Структурная теория алгебр Ли. Универсальная обертывающая алгебра, теорема Пуанкаре–Биркгофа–Витта. Разрешимые и нильпотентные алгебры Ли. Коммутант и радикал. Теоремы Ли и Энгеля. Полупростые и редуцируемые алгебры, полупростота классических алгебр Ли. Форма Киллинга.
5. Комплексные полупростые алгебры Ли. Вещественные формы, компактная форма. Полная приводимость представлений. Полупростые элементы. Картановские подалгебры. Корневое разложение.
6. Системы корней. Абстрактные системы корней, группа Вейля, решетки корней и весов. Камеры Вейля. Простые отражения. Схемы Дынкина и классификация систем корней. Соотношения Серра и классификация полупростых алгебр Ли.

Курс рассчитан на студентов 2–4 курса, владеющих курсами алгебры и анализа на многообразиях. Также полезно знать основы теории представлений конечных групп.

Литература

1. А. А. Kirillov Jr., *Introduction to Lie groups and Lie algebras*
<http://www.math.sunysb.edu/~kirillov/liegroups/>
2. Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*. М.: Наука, 1989
3. Дж. Хамфрис. *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений*, М.: МЦНМО, 2003
4. У. Фултон, Дж. Харрис. *Теория представлений, начальный курс*. М.: МЦНМО, 2017