**НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях.**
**Экзамен. 20.12.2019.**

*Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо* *не позднее*, *чем 27 декабря, положить в учебной части в почтовую ячейку с моим именем (А. Пенской) или оставить на вахте внизу в конверте с моим именем или прислать отсканированное (не сфотографированное на телефон!) решение мне на электронную почту.*

*Убедительная просьба решать самостоятельно и не откладывать на последний день. Для того, чтобы экзамен был засчитан, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами не менее 3 задач.*

*Пересчет баллов в оценки следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно».*

**Задача 1.** Пусть $[z_0 : \ldots : z_n]$ однородные координаты в $\mathbb{RP}^n$. *Отображение Веронезе* степени $d$ — это отображение $\nu_d : \mathbb{RP}^n \longrightarrow \mathbb{RP}^N$, заданное формулой

$$\nu_d([z_0 : \ldots : z_n]) = [\ldots : z^I : \ldots], \tag{1}$$

где $z^I$ это некоторый моном степени $d$ от $z_0, \ldots, z_n$, а в правой части (1) стоят все мономы степени $d$. Например, при $n = 2$ и $d = 2$ получаем отображение $\mathbb{RP}^2 \longrightarrow \mathbb{RP}^5$, заданное формулой $\nu_2([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0^2 : z_1^2 : z_2^2 : z_0z_1 : z_0z_2 : z_1z_2]$. Доказать, что отображение Веронезе — гладкое отображение. Описать образ отображения Веронезе. (5 баллов).

**Задача 2.** Пусть $M$ — связное многообразие. Докажите, что для любых двух точек $x, y \in M$ существует автоморфизм $M$ (то есть диффеоморфизм $M$ на себя), переводящий $x$ в $y$. (10 баллов).

**Задача 3.** Доказать, что подмножество $\{A | \det(A + I) = 0\}$ группы $\mathrm{SO}(3)$ диффеоморфно $\mathbb{R}P^2$. (15 баллов).

**Задача 4.** Вычислить производную Ли 2-формы

$$y\,dx \wedge dy + x\,dy \wedge dz + (x^2 + y^2 + z^2)dz \wedge dx$$

вдоль векторного поля $(x + y^2)\frac{\partial}{\partial x} + (y + z^2)\frac{\partial}{\partial y} + (z + x^2)\frac{\partial}{\partial z}$. (5 баллов).

**Задача 5.** Вычислить

$$\int_M \omega = (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz,$$

где $M \subset \mathbb{R}^3$ является параметризованной кривой $x = a\sin^2 t$, $y = 2a\cos t\,\sin t$, $z = a\cos^2 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. (5 баллов).

**Задача 6.** Найти когомологии двумерной сферы с $\mu$ вклеенными листами Мебиуса. (10 баллов).

**Задача 7.** Найти кольцо когомологий $\mathbb{CP}^n$ (то есть не только найти $H^i(\mathbb{CP}^n)$, но и понять, как устроено умножение в когомологиях). (10 баллов)

**Задача 8.** Доказать, что любая орбита действия компактной группы Ли является замкнутым вложенным подмногообразием. (10 баллов).

**Задача 9.** Рассмотрим $U(n)$ как заданное естественным вложением подмногообразие в $\mathbb{C}^{n^2}$. Найти пересечение $U(n) \cap \mathfrak{u}(n)$ как подмногообразие в $\mathbb{C}^{n^2}$. (10 баллов).

**Задача 10*.** Пусть $\varphi(x, \lambda)$ гладкая функция на $M^n \times \mathbb{R}$, а $\lambda_0$ такое число, что

$$\varphi(x, \lambda_0) = 0 \Longrightarrow d_x\varphi \neq 0.$$

Доказать, что $M_\lambda = \{x | \varphi(x, \lambda) \leqslant 0\}$ является многообразием с краем при $\lambda$ достаточно близком к $\lambda_0$, и

$$\frac{d}{d\lambda}\int_{M_\lambda} \omega = \int_{\partial M_\lambda} \tilde{\omega}.$$

Найти $\tilde{\omega}$. (25 баллов).