Полисимметрические полиномы и алгебры Фробениуса.
Multisymmetric polynomials and Frobenius algebras.

В.М. Бухштабер, А.В. Михайлов

Пусть $\mathrm{Sym}^{\mathrm{N}}(\mathbb{C}^2)$ – комплексное алгебраическое многообразие $(\mathbb{C}^2)^N/S_N$, где S_N – группа перестановок сомножителей в прямом произведении двумерного комплексного пространства $\mathbb{C}^2$ с координатами x, y. Координатным кольцом этого многообразия над полем $\mathbb{K}$ характеристики 0 является биградуированное кольцо $R_N(X,Y)$ полисимметрических полиномов $p(X,Y)$, где $X = (x_1, \dots, x_N)$, $Y = (y_1, \dots, y_N)$, т.е. полиномов, инвариантных относительно перестановок пар (x_i, y_i), $\deg x_i = \deg y_i = 2$.

Классическая задача о структуре кольца $R_N(X,Y)$ до сих пор не решена и является актуальной в теории представлений, алгебраической геометрии и математической физике. Доклад посвящен нашим недавним результатам в этом направлении.

Симметрические полиномы $p(X) = p(X, 0)$ и $p(Y) = p(0, Y)$ образуют в $R_N(X,Y)$ подкольцо полиномов $R_N(X) \otimes R_N(Y)$ и задают регулярную последовательность длины $2N$. Кольцо $R_N(X,Y)$ является кольцом Коэна–Маколея и кольцом Горенштейна. Фактор кольцо $\mathscr{R}_N$ кольца $R_N(X,Y)$ по этой последовательности является биградуированной алгеброй Фробениуса размерности $N!$ над полем $\mathbb{K}$ с фундаментальным классом биградуировки $\big(N(N-1), N(N-1)\big)$.

Пусть $Fl_N(2)$ – комплексное алгебраическое многообразие двойных флагов $Fl_N \times Fl_N$, где Fl_N – комплексное алгебраическое многообразие полных комплексных флагов в $\mathbb{C}^N$. Сопоставим флагу $\mathscr{V} \subset Fl_N$ ортонормированный базис в $\mathbb{C}^N$. Операция перестановки векторов этого базиса задает свободное действие группы S_N на Fl_N, которое *не сохраняет* его комплексную структуру. На $Fl_N(2)$ имеется соответствующее диагональное действие группы S_N. Это действие свободное, и определено *вещественное* алгебраическое ориентированное гладкое многообразие $\mathscr{F}l_N = Fl_N(2)/S_N$ размерности $2N(N-1)$.

В первой части доклада мы покажем, что кольцо $\mathscr{R}_N$ канонически изоморфно кольцу когомологий $H^*(\mathscr{F}l_N; \mathbb{K})$. Во второй части доклада будет описан метод построения аддитивных базисов и соответствующих таблиц умножения в алгебрах Фробениуса $\mathscr{R}_N$. Для малых N мы дадим явное построение структуры алгебры Фробениуса $\mathscr{R}_N$ и резольвенты алгебры $R_N(X,Y)$ как модуля над кольцом полиномов.