

## ПРОГРАММА ГОДОВОГО КУРСА «АЛГЕБРА – 1»

темы, набранные курсивом могут стать необязательными или упраздниться вовсе

### ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР (14-15 НЕДЕЛЬ)

НЕДЕЛЯ 1. Необходимые предварительные сведения и терминология, относящиеся к множествам и отображениям. Разбиения и факторизация. Диаграммы Юнга. Мультиномиальные коэффициенты и прочая комбинаторика.

НЕДЕЛЯ 2. Определения и терминология, относящиеся к полям, коммутативным кольцам и абелевым группам. Простейшие свойства гомоморфизмов абелевых групп, колец и полей. Прямые произведения абелевых групп и колец. Кольца и поля вычетов  $\mathbb{Z}/(n)$ . Китайская теорема об остатках, нод и взаимная простота в кольце целых чисел.

НЕДЕЛЯ 3. Многочлены и формальные степенные ряды, производная, обращение рядов, корни многочленов. Делимость и китайская теорема об остатках в кольце многочленов, кольца и поля вычетов  $\mathbb{k}[x]/(f)$ . Алгебраические расширения полей. Поле комплексных чисел.

НЕДЕЛЯ 4. Простое подполе, характеристика, гомоморфизм Фробениуса. Конечные поля. *Квадратичные вычеты.*

НЕДЕЛЯ 5. Кольца частных, поле рядов Лорана, поле рациональных функций, разложение рациональных функций в сумму простейших дробей и в степенной ряд. Решение линейных рекуррентных уравнений. Экспонента, логарифм, бином (с произвольным показателем). *Ряд Тодда и числа Бернулли, суммирование степеней. Ряды Пюизо, лемма Гензеля.*

НЕДЕЛЯ 6. Идеалы и фактор кольца. *Нётеровы кольца, теорема Гильберта о базисе идеала.* Простые и максимальные идеалы. Кольца главных идеалов, пример: евклидовы кольца. Факториальные кольца, факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом. Разложение на множители многочленов с целыми коэффициентами.

НЕДЕЛЯ 7. Модули над коммутативными кольцами. Образующие и соотношения, примеры из мира решёток и абелевых групп. Свободные модули, ранг. Пример: базисы векторных пространств. Матричный формализм для линейных выражений наборов векторов друг через друга и для задания линейных отображений. Умножение матриц, обратимые матрицы. Ассоциативные кольца и алгебры, образующие и соотношения в алгебре матриц. Матрицы над ассоциативным кольцом, обращение унитарной матрицы.

НЕДЕЛЯ 8. Ориентированный объём параллелепипеда. Чётность и цикловой тип перестановки. Определитель, его полилинейность, кососимметричность, инвариантность при транспонировании и мультипликативность.

НЕДЕЛЯ 9. Грассмановы многочлены над коммутативным кольцом. Разложение определителя по набору строк. Приложения определителей: правила Крамера для решения неоднородных квадратных систем и однородных систем размера  $(n - 1) \times n$ , присоединённая матрица и тождество Гамильтона – Кэли, *определитель пучка матриц. Грассмановы квадратичные формы, критерий разложимости. Пфаффиан кососимметричной матрицы.*

НЕДЕЛЯ 10. Метод Гаусса над полем и его применение: для отыскания базиса в подпространстве, порождённом набором векторов, и в факторе по этому подпространству; для обращения матрицы; для решения системы линейных уравнений. Расположение подпространства по отношению к базису, единственность базиса с приведённой ступенчатой матрицей координат.

НЕДЕЛЯ 11. Конечно порождённые модули над кольцами главных идеалов: подмодуль свободного модуля свободен, метод Гаусса, теоремы об элементарных делителях и об инвариантных множителях, каноническое разложение модуля в прямую сумму циклических. Примеры: строение конечно порождённых абелевых групп, решение линейных диофантовых уравнений, ранг подрешётки и формула Пика для многомерного параллелепипеда.

НЕДЕЛЯ 12. Пространство с оператором: классификация (над произвольным полем), элементарные делители, нормальная форма Фробениуса. Характеристический и минимальный многочлены. Нильпотентные и полупростые операторы. Циклические векторы. Собственные подпространства, собственные значения и диагонализуемые операторы. Свойства коммутирующих операторов.

НЕДЕЛЯ 13. Разложение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств по разложению аннулирующего многочлена на множители. Корневое разложение. Вычисление функций от матриц и операторов при помощи полиномиальной интерполяции.

НЕДЕЛЯ 14. *Разложение Жордана и ЖНФ над алгебраически замкнутым полем.*

## ВТОРОЙ СЕМЕСТР (13-14 НЕДЕЛЬ)

НЕДЕЛЯ 1. Группы преобразований и абстрактные группы. Примеры и свойства гомоморфизмов. Действие группы на множестве, длины орбит. Регулярное представление, смежные классы. Внутренние автоморфизмы, классы сопряжённости, нормальные подгруппы, фактор группы. Примеры: группы фигур, симметрические и знакопеременные группы, аффинная и проективная группы над конечными полями.

НЕДЕЛЯ 2.  $p$ -группы и теоремы Силова. Прямые и полупрямые произведения. Простые группы и теорема Жордана – Гёльдера.

НЕДЕЛЯ 3. Свободные группы и задание групп образующими и соотношениями. Примеры групп, порождённых отражениями: группы платоновых тел, симметрическая группа (= полная группа правильного симплекса).

НЕДЕЛЯ 4. *Классификация евклидовых групп Кокстера, систем корней и правильных многогранников.*

НЕДЕЛЯ 5. Пространство с билинейной формой (над любым полем): корреляции, ядро и ранг. Невырожденные билинейные формы: соответствие между формами и операторами; двойственные базисы; ортогоналы, ортогональные разложения и ортогональные проекции; канонический оператор и классификация невырожденных билинейных форм над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль.

НЕДЕЛЯ 6. Пространство со скалярным произведением (над любым полем): существование ортогонального базиса, разложение в прямую сумму анизотропного и гиперболического подпространств, ортогональная группа порождается отражениями и транзитивно действует на изотропных и гиперболических подпространствах заданной размерности.

НЕДЕЛЯ 7. Квадратичные формы (над произвольным полем характеристики, отличной от двух): поляризация, классификация над полями  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}$  и  $\mathbb{F}_q$ , отыскание индекса вещественной квадратичной формы. Примеры из геометрии проективных и аффинных квадратов.

НЕДЕЛЯ 8. Симплектические пространства: существование базиса Дарбу, лагранжевы подпространства и антисамосопряжённые операторы. Симплектическая группа транзитивно действует на изотропных и лагранжевых подпространствах заданной размерности. *Грассмановы квадратичные формы, критерий разложимости. Пфаффиан кососимметричной матрицы.*

НЕДЕЛЯ 9. Эрмитовы пространства: ортогонализация, длины, углы, объём, ортогональное проектирование, унитарная группа. Ортогональная диагонализация нормальных операторов, канонический вид самосопряжённых, антисамосопряжённых и унитарных операторов.

НЕДЕЛЯ 10. SVD-разложение линейных отображений и полярное разложение невырожденного оператора. Экспоненциальное отображение.

НЕДЕЛЯ 11. Комплектификация и о веществе, вещественный геометрический смысл комплексных собственных векторов. Эрмитово продолжение евклидовой структуры, канонический вид вещественных евклидово (анти) самосопряжённых и ортогональных операторов.

НЕДЕЛЯ 12. Кэлеровы тройки, описание кэлеровых троек, продолжающих заданную симплектическую структуру до эрмитовой: зигелево полупространство и соотношения Римана.

НЕДЕЛЯ 13. Тело  $\mathbb{H}$ , норма, сопряжение, чисто мнимые кватернионы. Действие сопряжением, универсальное накрытие  $S^3 \simeq \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$ . Два семейства эрмитовых структур на  $\mathbb{H}$ , спиноры. Расслоение Хопфа  $S^3 \rightarrow S^2$ . Приложение кватернионов в геометрии четырёхмерных правильных многогранников.