ПРИМЕРНАЯ ПРОГРАММА ПРЕДЛАГАЕМОГО КУРСА "ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ"

Звездочкой отмечены вопросы, на которые, скорее всего, не хватит времени.

1. Векторы.
   1.1. Векторные пространства и базисы.
   Векторное пространство (над полями $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_2$), подпространство, линейное отображение. *Фактор-пространства. Конечномерные (конечно порожденные) пространства; всякое конечномерное пространство имеет базис, причем базис в подпространстве всегда можно дополнить до базиса в пространстве. Линейная оболочка; связь размерностей подпространств, их линейной оболочки и их пересечения.
   1.2. Линейные отображения.
   Линейные отображения как группа преобразований. Ядро, образ и их размерности. Двойственное пространство, двойственный базис и двойственное отображение. Изоморфизм пространства, двойственного и дважды двойственного. Транзитивность действия $\mathrm{GL}(n)$ на множестве базисов; матрица линейного отображения. Матрица произведения операторов, двойственного оператора и обратного оператора (*метод Гаусса).
2. Аффинная геометрия.
   2.1. Аффинная группа.
   Аффинное пространство, симплексы и барицентрические координаты. Линейная группа — фактор аффинной по множеству параллельных переносов. Нормализатор гиперплоскости — аффинная группа. Аффинная группа действует точно транзитивно на множестве симплексов полной размерности. *Полуаффинные преобразования и автоморфизмы полей.
   2.2. Выпуклые множества.
   Теорема Каратеодори и теорема Хелли о пересечениях. *Теорема об отделимости. *Теорема Крейна–Мильмана. *Основы выпуклой двойственности.
3. Проективная геометрия.
   3.1. Проективная группа.
   Группа проективных преобразований — фактор линейной группы по множеству растяжений. Аффинная группа как нормализатор гиперплоскости в проективной группе. Проективная группа действует точно транзитивно на множестве наборов $(n+2)$ точек общего положения.
   3.2. Проективная геометрия малых размерностей.
   Преобразование прямой проективно тогда и только тогда, когда сохраняет двойное отношение. Действие группы S_4 на двойное отношение. *Преобразование комплексной прямой проективно тогда и только тогда, когда сохраняет ориентацию и переводит окружности в окружности. Теорема Дезарга.
   3.3. *Основы проективной двойственности.
   Двойственность для прямых. Двойственность для коник. Двойственность для кусочно-выпуклых кривых на проективной плоскости.
4. Евклидова геометрия.
   4.1. Определитель.
   Определитель как полилинейная по строкам кососимметрическая функция квадратной матрицы. Формула разложения по строке. Мультипликативность. Определитель транспонированной матрицы. Формула для обратной матрицы и для решения системы линейных уравнений (формула Крамера). Определитель линейного оператора.
   Этот пункт может быть по согласованию перенесен в курс алгебры.
   4.2. Билинейные формы и скалярные произведения.
   Билинейные и квадратичные формы. Матрица билинейной формы и ее зависимость от выбора базиса. Скалярные произведения, неравенство Коши–Буняковского. Орбиты действия ортогональной группы на векторах, подпространствах, парах векторов (угол), *парах подпространств. Определитель матрицы Грама.
   4.3. Аффинные евклидовы пространства
   Неравенство треугольника. Расстояние между аффинными подпространствами.
   4.4. Объемы.
   Определение объема. Инвариантность объема при параллельном переносе. Принцип Кавальери. Полилинейность объема пареллелепипеда. Ориентация базиса $\mathbb{R}^n$. Объем параллелепипеда равен модулю определителя. Инвариантность объема при ортогональных преобразованиях.

Доказательства некоторых утверждений этого пункта могут быть отложены до курса анализа 2–3 семестра.

4.5. *Коники

Ортогонализация Грама–Шмидта. Приведение квадратичной формы к сумме квадратов (над произвольным полем, над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$). Проективная классификация коник над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$. Теоремы Паппа, Паскаля и Брианшона. Аффинная классификация коник над $\mathbb{C}$ и над $\mathbb{R}$.

5. *Геометрия Лобачевского.

5.1. Модель Пуанкаре в полуплоскости.

Аффинная группа плоскости Лобачевского — явное описание, транзитивность действия на флагах, изоморфизм с подгруппой проективной группы прямой. Существование и единственность инвариантной метрики; явная формула.

5.2. Прочие модели и аксиоматический подход.

Модель Пуанкаре в круге, модель Клейна в круге, модель Клейна в гиперболоиде — эквивалентность, описание аффинной группы, явные формулы для метрики. Аксиоматический подход.

5.3. Углы и площади.

Голоморфность и конформность. Площадь и сумма углов треугольника. Понятие кривизны метрики.

Книги по геометрии

1. В.В.Прасолов, В.М.Тихомиров, *Геометрия*, М., МЦНМО, 2007.
2. А.И.Кострикин, Ю.И.Манин, *Линейная алгебра и геометрия*, М., Наука, 1986 (и более поздние переиздания).