

## Дзета-функция Римана

Аннотация: Многие классические и современные вопросы теории чисел сводятся к свойствам дзета-функции Римана и её аналогов, таких как L-функции Дирихле. Отчасти это объясняется тем, что ряды Дирихле – наиболее естественный тип производящих функций для последовательностей со свойством мультипликативности. В данном курсе мы в основном сосредоточимся на дзета-функции Римана, её связи с простыми числами, а также аналитических свойствах, таких как универсальность Воронина.

### Программа:

1. Суммирование по частям. Ряды Дирихле. Дзета-функция, её аналитическое продолжение и функциональное уравнение. L-функции Дирихле.  $\tau$ -функция Рамануджана.\*
2. Формула Перрона. Проблема делителей Дирихле и её аналоги. Формула Вороного.\*
3. Дзета и простые числа. Границы нулей, формула Римана-Мангольда. Гипотеза Римана. Корреляции нулей и случайные матрицы.\*
4. Приближённое функциональное уравнение, средние рядов Дирихле и плотностные теоремы. Плотностная гипотеза. Простые числа в коротких интервалах. Теорема Сельберга о промежутках между простыми числами.\*
5. Большие значения дзета-функции. Теорема универсальности Воронина. Случайные голоморфные функции.\*

### The Riemann zeta-function

Abstract: Many classical and modern problems in number theory can be reduced to properties of the Riemann zeta-function and its analogues, such as Dirichlet L-functions. This is partially explained by the fact that Dirichlet series are the most natural type of generating functions for sequences with multiplicativity property. In this course, we will mostly concentrate on the Riemann zeta-function, its connection with prime numbers and analytical properties, such as Voronin's universality.

### Program:

1. Summation by parts. Dirichlet series. Zeta-function, its analytic continuation and functional equation. Dirichlet L-functions. Ramanujan  $\tau$  function.\*
2. Perron's formula. Dirichlet divisor problem and its analogues. Voronoi summation formula.\*
3. Zeta and primes. Zero-free region, Riemann-von Mangoldt formula. Riemann hypothesis. Correlations of zeros and random matrices.\*

4. Approximate functional equation, averages of Dirichlet series and zero density estimates. Density hypothesis. Prime numbers in short intervals. Selberg's theorem on gaps between primes.\*

5. Large values of zeta-function. Voronin's universality theorem. Random holomorphic functions.\*