

p -адические числа

p -адические числа ввёл К.Хензель в 1897 году в рамках аналитического подхода к некоторым теоретико-числовым задачам, но с заменой поля вещественных чисел более подходящим локально компактным полем. (При том, что общая теория полей Э.Штайница появилась позже, отчасти под влиянием p -адических чисел.)

Однако ещё на полвека раньше близкие к p -адическим числам идеи появились у Э.Куммера. А Р.Дедекинд и Х.Вебер (1882) перенесли идеи Куммера на кривые. Это позволило сблизить теоретико-числовую терминологию (и интуицию) с геометрической. Так появилась возможность говорить о «глобальных» (относящихся к конечным расширениям \mathbb{Q} или к кривым) и «локальных» (относящихся к p -адическим полям или формальным рядам Лорана) вопросах.

Помимо изучения основ p -адического анализа (и близких к нему тем), цель курса — обсудить примеры, в которых (не) работает «локально-глобальный принцип» («утверждение верно над \mathbb{Q} тогда и только тогда, когда оно верно над каждым \mathbb{Q}_p и над \mathbb{R} ») и разобрать примеры ситуаций, где оказываются задействованы p - (или ℓ -) адические числа. Один из таких примеров — доказательство Б.Дворка одной из гипотез А.Вейля о количестве решений систем полиномиальных уравнений над конечными полями.

ПРОГРАММА

- Локально компактные неметризуемые поля: классификация.
- Структура мультипликативной группы локального поля, векторы Витта.
- Алгебраические расширения локального поля.
- Связь локальных и глобальных свойств («принцип Хассе»). Примеры:
 - квадратичные формы (символ Гильберта; теорема Минковского–Хассе);
 - конечномерные простые алгебры.
- Пополнение алгебраического замыкания p -адического поля.
- Конгруэнц дзета-функции и их рациональность.
- (Разнообразные) модули Тейта и их применения к
 - подсчёту точек на кривых над конечными полями;
 - p -адическому интегрированию.

ЛИТЕРАТУРА

- З.И.Боревич, И.Р.Шафаревич, Теория чисел.
- А. Вейль, Основы теории чисел.
- Н.Коблиц, « p -адические числа, p -адический анализ и дзета-функции».
- Ж.-П.Серр, «Курс арифметики».
- J.-P.Serre, «Corps locaux».

ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Подразумевается знакомство с основными понятиями и результатами алгебры, математического анализа в объёме первого курса и теории Галуа.