

Избранные сюжеты из топологии поверхностей

Осень 2024

Этот курс состоит из нескольких сюжетов, по сути обособленных, но объединённых общей тематикой — топология поверхностей. Мы освоим несколько полезных приёмов из алгебраической и дифференциальной топологии, применяя их в наглядных маломерных ситуациях, и в итоге докажем ряд классических но не слишком широко известных теорем.

Курс рассчитан на студентов 3–4 курса. Для понимания достаточно знать что такое гомотопия и уметь считать клеточные гомологии, а также понимать что такое дифференциал гладкого отображения многообразий.

Примерная программа:

- Доказательство Хатчера, что гладкая структура на поверхности единственна с точностью до изотопии, ака трюк Кирби для поверхностей, основной приём в доказательстве — разбиение на ручки при помощи функции Морса и последующий анализ комбинаторики склейки ручек (2 лекции).
- Разветвлённые накрытия, проблема Гурвица — для каких данных ветвления в базе разветвлённое накрытие реализуется (1-2 лекции).
- Теорема Эдмондса о факторизации — любое отображение поверхностей ненулевой степени гомотопно композиции разветвлённого накрытия и схлопывания ручек (1-2 лекции).
- Геометрическая степень — минимальное число прообразов регулярного значения по всем отображениям из заданного гомотопического класса, для отображений, сохраняющих ориентацию, она равна обычной степени (1 лекция).
- Неравенство $\chi(M) \leq \text{Deg}(f) \cdot \chi(N)$ для отображения $f : M \rightarrow N$ замкнутых поверхностей ненулевой степени (1 лекция).
- Теорема Дена-Нильсена — любой автоморфизм $\pi_1(M)$ реализуется гомеоморфизмом M (1 лекция).
- То же для гомологий: любой автоморфизм $H_1(M; \mathbb{Z})$, сохраняющий спаривание, реализуется гомеоморфизмом M (1-2 лекции).
- Когомологии с локальными коэффициентами (1 лекция).
- Класс Эйлера с коэффициентами в ориентирующем пучке (1 лекция).
- Отображения поверхностей с заданными складками и сборками (1 лекция).
- Если будет мало, можно поговорить про гиперболические структуры и пространство Тейхмюллера, или про трёхмерные многообразия и разбиения Хегора, или например про видимые контуры — образы складок и сборок, какими они могут быть и что про них известно.