Программа «Матшкольник»:
образцы задач и экзаменационных вариантов

1. Арифметика и алгебра

1.1. Кольцо целых чисел. Кольца и поля вычетов

1) Доказать, что если $ad+bc$ делится на $a+c$, то и $ab+cd$ делится на $a+c$.

2) Найти наименьшее 60-значное число, делящееся на 101.

3) Найти НОД$(2^{18}-1, 2^{32}-1)$.

4) Существует ли число, дающее при делении на 2, 3, 5, 7, 11 остатки 1, 2, 3, 4, 5 соответственно?

5) При каких целых a уравнение $12x+20y+30z=a$ имеет целочисленные решения?

6) Число p простое, не равно 2 и 5. Доказать, что дробь $\frac{1}{p}$ периодична и число знаков периода является делителем $p-1$.

7) Решить в целых положительных числах уравнение

$$\frac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}}=\frac{7}{27}.$$

8) Сколько существует чисел, которые могут быть остатками при делении точных квадратов на 101?

1.2. Кольцо многочленов

1) При делении многочлена $P(x)$ на $x-1$ получается остаток 2, а при делении на $x-3$ — остаток 1. Найти остаток при делении $P(x)$ на $(x-1)(x-3)$.

2) Доказать, что НОД$(x^m-1, x^n-1) = x^{\text{НОД}(m,n)}-1$.

3) Известно, что $P(x) < 5(x^2+1)^3+1000$ при всех x. Что можно сказать о степени P?

4) Доказать, что система

$$\begin{cases} x+y+z+t=a \\ x+2y+3z+4t=b \\ x+4y+9z+16t=c \\ x+8y+27z+64t=d \end{cases}$$

при любых a, b, c, d имеет единственное решение.

5) Нарисовать множество тех пар (p,q), при которых квадратный трехчлен x^2+px+q имеет 2 положительных корня.

6) Доказать, что если число $\sqrt[n]{a}$ рационально (для натуральных a и n), то оно — целое.

7) Найти многочлен $P(x)$ степени 3, для которого $P(1)=1$, $P(2)=5$, $P(3)=0$, $P(4)+P(5)=8$.

8) Многочлен степени 4 имеет 3 действительных корня. Может ли его производная иметь ровно 1 действительный корень?

9) Найти $\displaystyle\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

10) Известно, что $x+y+z$, $xy+yz+xz$, xyz — целые числа. Можно ли утверждать, что число $x^3+y^3+z^3$ — целое?

11) Доказать, что числа $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ и $\sqrt[3]{2}+\sqrt{5}$ являются корнями ненулевых многочленов с целыми коэффициентами.

1.3. Поле комплексных чисел

1) Вычислить $(1+i)^{1001}$.

2) Найти произведение и сумму всех корней степени n из числа a.

3) Какой аргумент может иметь число z, если $|z-i|<0{,}5$?

4) Найти многочлен минимальной степени из $\mathbb{R}[x]$, для которого числа $1+i$, 2 и $3-i$ были бы корнями.

5) Доказать, что множество тех z, для которых $Re(1/z)=1$, есть окружность (без точки).

6) Какие значения может принимать произведение всех расстояний от точки $\langle 2,0\rangle$ до вершин правильного семиугольника, вписанного в окружность единичного радиуса с центром в 0?

7) На комплексной плоскости даны точки a и b. Где находятся те z, для которых $(z-a)/(z-b)$ — чисто мнимое число?

1.4. Комбинаторика. Группа перестановок

1) Сколько пятизначных чисел содержат в своей записи цифру 8 и не содержат 0?

2) Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $xyz = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$?

3) Сколько существует пятизначных чисел, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (каждая входит по одному разу), в которых цифра 5 не стоит на пятом месте?

4) Сколько решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = l$ в целых неотрицательных числах?

5) Найти сумму всех чисел n-ой строки треугольника Паскаля с чётными номерами.

6) Найти знакопеременную сумму всех чисел n-ой строки треугольника Паскаля с чётными номерами ($C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 + \dots$).

7) Доказать, что число разбиений целого положительного числа n на нечётные целые положительные слагаемые равно числу его разбиений на различные целые положительные слагаемые. (Порядок слагаемых считается несущественным.)

8) Существует ли перестановка 7-элементного множества, имеющая порядок 34?

9) Доказать, что всякая четная перестановка может быть представлена в виде произведения перестановок вида (i, j, k), при которых $i \mapsto j$, $j \mapsto k$, $k \mapsto i$, а остальные числа остаются на месте.

2. Анализ

2.1. Теория множеств

1) Какую мощность имеет множество всех непрерывных функций на отрезке?

2) Доказать, что $A \times A$ равномощно A, если A — множество всех бесконечных последовательностей нулей и единиц.

3) Доказать, что круг и квадрат (с внутренностями) равномощны.

4) Доказать, что множество действительных чисел равномощно множеству иррациональных чисел.

2.2. Последовательности и пределы

1) Доказать, что если $x_n^2 + y_n^2 \to 0$, то $x_n + y_n \to 0$.

2) Доказать, что если последовательность сходится к положительному числу a, то последовательность квадратных корней из ее членов сходится к $\sqrt{a}$.

3) Найти пределы $100^n/n!$, $n^{1/n}$, $n^2/2^n$, $((2^n + 3^n + 4^n)/(5^n + 6^n))^{1/n}$.

4) Доказать, что всякая последовательность имеет монотонную подпоследовательность.

5) Имеет ли последовательность $\sin 1$, $\sin 2$, $\sin 3$, $\ldots$ предел?

2.3. Свойства действительных чисел

1) Если M — бесконечное множество точек отрезка, то существует такая точка x, что любой интервал, содержащий x, содержит бесконечно много точек из множества M.

2) Доказать, что если в множестве отрезков любые два имеют общую точку, то существует точка, принадлежащая всем отрезкам этого множества.

3) Если функция f такова, что для любой точки отрезка существует содержащий её интервал, на котором f ограничена, то f ограничена на всем отрезке.

4) Доказать, что если разность между n-м и k-м членами последовательности не превосходит по модулю $1/n + 1/k$, то эта последовательность сходится. Что можно сказать, если эта разность не превосходит по модулю $1/(nk)$?

2.4. Числовые ряды

1) Доказать, что если ряды с членами x^2 и y^2 сходятся, то и ряд с членами $x_n y_n$ сходится.

2) При каких x сходится ряд с членами $n^2 x^n$?

3) Доказать, что функция $f(x)$, равная сумме ряда $x^n/n!$, n — целое неотрицательное, определена при всех x и $f(x + y) = f(x)f(y)$.

4) При каких p сходится ряд с членами $1/(n^p + n)$?

5) Вычислить сумму ряда $\sum_n 1/n^3$ с точностью до 0,01.

2.5. Непрерывность на прямой

1) Доказать, что если f — непрерывная функция, отображающая отрезок $[0,1]$ в себя, то существует такое x, что $f(x) = x$.

2) Построить функцию на действительной прямой, множество точек разрыва которой состоит из всех точек вида $1/n$ при целых положительных n.

3) Функция f определена при неотрицательных x так: $f(x) = (1 + x^3)/2^x$. Будет ли она равномерно непрерывной?

4) Какие множества могут быть множествами значений непрерывных на интервале $(0,1)$ функций?

5) Доказать непрерывность функции $f(x) = \sum_n n^2 x^n$ на отрезке $[0, 0{,}5]$.

6) Первый член последовательности равен 1, а каждый следующий — квадратному корню из суммы предыдущего члена и числа 2. Имеет ли эта последовательность предел?

2.6. Дифференцирование на прямой

1) Известно, что уравнение $f(x) = a$ имеет n решений. Какое число решений может иметь уравнение $f'(x) = 0$?

2) Может ли производная всюду дифференцируемой функции не быть непрерывной?

3) Известно, что $|f(y) - f(x)| \leq (y - x)^2$. Доказать, что f — константа.

4) Известно, что $h(x) = f(f(x))$, $f(2) = 2$, производная $h'(2)$ равна 3. Чему может быть равно $f'(2)$?

5) Найти число решений уравнения $x^3 - x + a = 0$ в зависимости от a.

6) Найти касательную к кривой $x^3 + x + y^3 + y = 2$ в точке $\langle 1, 0 \rangle$.

7) Доказать, что среднее геометрическое не больше среднего арифметического, пользуясь выпуклостью логарифма.

8) Найти предел отношения $(\sin x - \operatorname{tg} x)/x^3$ при $x \to 0$.

2.7. Интеграл

1) Найти $g'(1)$ и $g'(2)$, если $g(x) = \int_x^{x^2} (\sin t)/t\,dt$

2) Найти точную верхнюю грань чисел $\int_0^1 xf(x)\,dx$ по всем непрерывным на $[0,1]$ функциям, для которых $\int_0^1 f(x)\,dx \le 2$.

3) Функция f непрерывна на $[0,1]$. Доказать, что $\int_0^1 f(x)\sin nx\,dx \to 0$ при $n \to \infty$.

4) Вычислить $\int x \ln x\,dx$.

5) Доказать, что последовательность $1 + 1/2 + \cdots + 1/n - \ln n$ монотонна и ограничена.

3. Геометрия

3.1. Группы преобразований плоскости и их комплексный смысл

1) Если фигура имеет два центра симметри, то она имеет и третий.

2) Во что переходит треугольник с вершинами $1+i$, $2-3i$, $4-i$ при повороте на 120° вокруг $2-2i$?

3) Найти все движения, перестановочные с поворотом на 90° вокруг данной точки.

4) При каких a, b преобразование $z \mapsto a\bar{z} + b$ является симметрией?

5) При каких a, b преобразование $z \mapsto az + b$ является гомотетией?

6) Две карты одной местности разных масштабов положены друг на друга. Доказать, что их можно проколоть иглой, отметив на обеих картах одну и ту же точку местности.

7) Даны три окружности разных радиусов. К каждой паре проведены внешние касательные и взята точка их пересечения. Доказать, что три этих точки лежат на одной прямой.

8) Доказать, что комплексные числа a, b, c, d лежат на одной прямой или окружности, если $\dfrac{a-c}{a-d} : \dfrac{b-c}{b-d}$ действительно.

9) Найти все дробно-линейные преобразования, отображающие верхнюю полуплоскость на себя.

10) Доказать, что центры правильных треугольников, построенных на сторонах произвольного треугольника, образуют правильный треугольник.

11) Дана точка и две окружности. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся данных окружностей.

3.2. Геометрия векторных пространств

1) Найти размерность минимального подпространства в пятимерном пространстве, содержащего вектора $\langle 1,1,5,1,1\rangle$, $\langle 0,2,4,2,1\rangle$, $\langle 0,3,3,3,1\rangle$, $\langle 0,4,2,4,1\rangle$, $\langle 0,5,1,6,2\rangle$.

2) Доказать, что векторы $\langle 1,2,\ldots,n\rangle$, $\langle 1^2,2^2,\ldots,n^2\rangle$, $\ldots$, $\langle 1^n,2^n,\ldots,n^n\rangle$ линейно независимы.

3) Доказать, что любая последовательность, удовлетворяющая соотношению $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, имеет вид $a_n = A2^n + B(-1)^n$ при некоторых A и B.

4) При каких условиях на числа a, b, c, d можно найти вектора u и v в пространстве, для которых $(u,u) = a$, $(u,v) = b$, $(v,u) = c$, $(v,v) = d$?

5) Найти площадь треугольника, заданного координатами его вершин в пространстве.

6) Найти расстояние от точки пространства, заданной её координатами, до плоскости, заданной коэффициентами определяющего её линейного уравнения.

7) Длина каждого из трех векторов пространства равна 1, а скалярное произведение любой пары векторов равно -0.5. Доказать, что эти вектора линейно зависимы.

4. Письменный экзамен 1984 года

Письменный экзамен по программе «Матшкольник», происходивший в конце 1983/4 учебного года, состоял из двух частей: по арифметике и алгебре и по анализу. На обе части вместе было предоставлено 6 часов.

Часть 1. Арифметика и алгебра

1) Решить в целых положительных числах уравнение
$$\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}} = \frac{7}{27}.$$

2) Существует ли число, записываемое n единицами подряд и делящееся на 49, если $0 < n < 45$?

3) На плоскости изображены правильный m-угольник и правильный n-угольник. Доказать, что если m и n взаимно просты, то можно построить с помощью циркуля и линейки правильный mn-угольник.

4) Найти наибольший общий делитель многочленов $x^{480} - 1$ и $x^{36} + 1$.

5) Многочлен $P(x)$ удовлетворяет тождеству $P(x) = P(1 - x)$. Доказать, что есть такой многочлен $M(y)$, что $P(x) = M((x - 0.5)^2)$.

6) Известно, что $z + 1/z = 2\cos a$. Доказать, что $z^n + 1/z^n = 2\cos na$.

7) Найти сумму квадратов сторон и диагоналей правильного 7-угольника, вписанного в единичную окружность на комплексной плоскости.

8) Найти размерность минимального подпространства, содержащего строки $\langle 1, a, -1, 2\rangle, \langle 2, -1, a, 5\rangle, \langle 1, 10, -6, 1\rangle$ (a — параметр).

9) Матрицу 2×2 будем записывать строчкой из четырех входящих в неё чисел. Доказать, что отображение, переводящее матрицу X в матрицу AX является линейным оператором и найти его матрицу (размера 4×4). Здесь A — некоторая фиксированная матрица размера 2×2.

   [Примечание. В вариант программы, по которой проводился экзамен, входило понятие матрицы и линейного оператора.]

10) Какова вероятность угадать ровно 4 номера в игре «Спортлото 6 из 49»? [В этой игре надо выбрать 6 чисел среди $1, 2, \ldots, 49$, во время розыгрыша выбираются другие шесть чисел и считается количество общих чисел в этих двух шестёрках.]

11) Сколько решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 100$, где переменные принимают натуральные значения, большие 2?

12) Доказать, что нельзя, поворачивая грани кубика Рубика, добиться того, чтобы

    (а) один рёберный (на середине ребра) кубик перевернулся, а остальные остались в прежнем положении и по-старому ориентированными;

    (б) угловые кубики одной из граней циклически переставились, а остальные остались на своих местах (ориентация кубиков может поменяться).

Часть 2. Математический анализ

1) Найти предел последовательности, заданной соотношениями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 0.5(a_n + 2/a_n)$.

2) Доказать, что знаки можно выбрать так, чтобы равенство $1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \cdots = 5$ стало верным.

3) Является ли равномерно непрерывной на действительной оси функция (а) e^{-x}; (б) $\dfrac{1}{1+x^2}$?

4) Доказать, что $\sin x > x - x^3/6$ при $0 < x < \pi/2$.

5) Доказать, что множество точек разрыва монотонной функции не более чем счётно.

6) $P(x)$ — многочлен, разлагающийся на линейные множители с действительными коэффициентами, причем $P'(0) = P''(0) = 0$. Доказать, что $P(0) = 0$.

7) Сходится ли ряд $\sum 1/(n \ln n)$?

8) Доказать, что предел интегралов по любому отрезку от функций $e^{x^2} \cos nx$ при n, стремящемся к бесконечности, равен 0.

9) Функция определена на всей числовой оси, причем у каждой точки есть окрестность, в которой функция монотонно возрастает. Доказать, что функция монотонно возрастает на всей числовой оси.

10) Существует ли функция, непрерывная во всех иррациональных точках и разрывная во всех рациональных?

5. Письменный экзамен, май 1985

Часть 1. Арифметика и алгебра

1) (а) Числа p и q простые. Доказать, что если $2^p - 1$ делится на q, то $q - 1$ делится на $2p$; (б) просто ли число $2^{13} - 1$?

2) Число x называется квадратичным вычетом по простому модулю p, если оно сравнимо с некоторым точным квадратом по этому модулю. Доказать, что произведение вычета, не делящегося на p, и невычета является невычетом по модулю p.

3) Решить уравнение $(x + iy)^5 = x - iy$.

4) (а) Найти сумму $\sin(\pi k/2n)$ по всем $k = 1, \ldots, 2n$; (б) Найти произведение $\sin(\pi k/2n)$ по всем $k = 1, \ldots, n$.

5) Найти сумму коэффициентов многочлена $(x^2 - x + 1)^{100}$.

6) При каком n многочлен $a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n$ делится на $a^2 + ab + b^2)$ (как многочлен над $\mathbb{C}$)?

7) Найти максимальный порядок перестановки 10-элементного множества.

5.1. Часть 2. Анализ

1) Найти предел суммы $1/n + 1/(n+1) + \cdots + 1/2n$ при $n \to \infty$.

2) Найти точную верхнюю грань всех чисел вида $\sin x + \cos\sqrt{x}$ по всем действительным x.

3) Что больше: π^e или e^π?

4) Каждый следующий член последовательности равен синусу предыдущего. Найти ее предел.

5) Найти первообразную функции $1/\sin x$.

6) Дана ограниченная выпуклая фигура площади S. Доказать, что можно провести две перпендикулярные прямые, делящие её на части площади $S/4$.

7) Дважды дифференцируемая на положительной полуоси функция стремится к 0 при $x \to \infty$ и имеет ограниченную вторую производную. Доказать, что её первая производная стремится к 0.

8) Доказать, что множество значений действительной функции действительного аргумента в точках (нестрогих) максимумов не более чем счётно.

9) Сходится ли ряд $\sum n(\sin n)/2^n$?

Часть 3. Геометрия

1) Был пятиугольник. На его сторонах построили вовне правильные треугольники и отметили их центры, а всё остальное стерли. Восстановить пятиугольник.

2) Найти все преобразования подобия, перестановочные с осевой симметрией.

3) Одна окружность лежит внутри другой. Доказать, что существует инверсия, переводящая окружности в концентрические.

4) При каких комплексных a, b, c, d преобразование $z \mapsto (a\bar{z}+b)/(c\bar{z}+d)$ — инверсия?

5) Сумма трех углов равна 2π. Доказать, что сумма их косинусов не меньше $-3/2$.

6) В четырехмерном пространстве рассмотрим линейную оболочку векторов $\langle 1,2,0,1\rangle$ и $\langle 1,1,1,0\rangle$, а также линейную оболочку векторов $\langle 1,0,1,0\rangle$ и $\langle 1,3,0,1\rangle$. Найти размерности суммы и пересечения этих подпространств.

6. Задачи устных экзменов

Алгебра

1) (а) Найти максимальный порядок чётной перестановки множества из 12 элементов. (б) Сколько существует чётных перестановок этого множества? (в) То же для множеств из 30 и 10 элементов.

2) Найти коэффициент при x^{179} в $(1-x+x^4)^{60}(1+x+x^4)^{60}$.

3) Слонопотам ходит по бесконечной шахматной доске как конь, только не на $\langle 1,2\rangle$, а на $\langle m,n\rangle$. При каких m и n слонопотам может попасть из начальной клетки в соседнюю?

4) (а) Уравнения $x^2-a=yp$ и $x^2-b=yp$ (a,b,p фиксированы, p — простое число) неразрешимы в целых числах. Доказать, что уравнение $x^2-ab=yp$ разрешимо в целых числах. (б) Сколько вычетов по модулю p являются квадратами ?

5) (а) Доказать, что многочлен, являющийся неприводимым в кольце многочленов с рациональными коэффициентами, не имеет кратных корней. (б) Доказать неприводимость над $\mathbb{Q}$ многочлена $x^6+x^5+\ldots+1$.

6) Найти $\sum_{n=1}^{100}(\cos nx)/2^n$.

7) (а) Доказать, что многочлен $P(x)=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_6)-1$ не разлагается на множители с рациональными коэффициентами. (б) Тот же вопрос для многочлена $(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_n)^{\alpha_n}-1$, где α_i взаимно просты.

8) Многочлен с действительными коэффициентами принимает в целых точках целые значения. Доказать, что он представляется в

виде суммы многочленов $q_i(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-i+1)/i!$ с целыми коэффициентами.

9) Найти $\sum_{i=1}^{p-1} i^k \bmod p$ для произвольного k и простого p.

10) (а) Каждая из граней куба раскрашена в один из четырёх цветов. Сколько существует различных раскрасок? (Раскраски, отличающиеся поворотом куба, считаются одинаковыми.) (б) Тот же вопрос для 6 цветов. (в) Тот же вопрос для 3 цветов.

11) (а) Найти 1985^{1000} по модулю 77. (б) Найти две последние цифры числа 77^{1000}.

12) (а) Доказать, что корни производной комплексного многочлена лежат в любой выпуклой фигуре, содержащей корни исходного многочлена. (б) Доказать, что если $a_1, \dots, a_n$ и z — комплексные числа, причём $\sum_i 1/(z-a_i) = 0$, то z лежит в любой выпуклой фигуре, содержащей все a_i.

13) Доказать, что для любых двух многочленов $P(t)$ и $Q(t)$ существует ненулевой многочлен от двух переменных $R(x, y)$, для которого $R(P(t), Q(t)) = 0$ при всех t.

14) Пусть $z + 1/z = 2\cos\varphi$. Найти $z^n + 1/z^n$.

15) Найти остаток от деления $x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x$ на $x^2 - 1$.

16) Можно ли за нечётное число перестановок двух соседних чисел получить из последовательности $1, 2, 3, \dots, 101$ последовательность $101, 100, 99, \dots, 2, 1$?

17) (а) Сколько существует чисел, взаимно простых с 2400 и меньших 2400 ? (Обозначение: $\varphi(2400)$.) (б) То же для числа $p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$ (p_i — простые). (в) Доказать, что $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для взаимно простых a и b.

18) (а) Доказать, что многочлен, инвариантный относительно чётных перестановок переменных, является суммой симметрического и кососимметрического. (б) Найти размерность пространства кососимметрических многочленов степени 5 от 3 переменных. (в) Найти размерность пространства многочленов от 10 переменных, все одночлены которых имеют суммарную степень 4. (г) Доказать основную теорему о симметрических многочленах. (д) Доказать, что если $x_1, \dots, x_n$ — список корней многочлена P степени n, то произведение $\prod_{i \neq j}(x_i - x_j)$ полиномиально выражается через коэффициенты многочлена P.

19) (а) Найти длину периода в десятичной записи $1/41$. (б) Доказать, что последовательность остатков при делении чисел $1, a, a^2, a^3, \ldots$ на простое p периодична, причем период является делителем числа $p-1$.

20) (а) Доказать, что значение комплексного многочлена степени меньше n в центре правильного n-угольника равно среднему арифметическому его значений в вершинах. (б) Доказать, что если корни многочлена степени n расположены в вершинах правильного n-угольника, то его производная в центре равна 0. Найти этот многочлен. (в) Доказать единственность разложения дроби $1/P(x)$, где $P(x)$ имеет лишь действительные корни, на простейшие дроби.

21) Сколько решений имеет сравнение $x^{11} \equiv 23 \pmod{23}$ (среди чисел от 0 до 22)?

22) Доказать, что $(p-1)! + 1$ делится на p при простом p.

23) (а) Выразить $\cos 77x$ через $\cos x$. (б) Найти многочлен с целыми коэффициентами с корнями $\sin(\pi/99), \sin(2\pi/99), \ldots, \sin(98\pi/99)$.

24) (а) $1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/(p-1) = m/n$, p простое. Доказать, что m делится на p. (б) Доказать, что частные суммы гармонического ряда не являются целыми числами.

25) (а) Если сравнение $x^2 + 1 \equiv 0$ разрешимо по простому модулю p, то p даёт остаток 1 при делении на 4. (б) Доказать, что верно и обратное. (в) Доказать, что сравнение $x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ всегда имеет ровно 2 решения (среди чисел $0ldotsp - 1$).

26) Можно ли, вращая кубик Рубика, повернуть угловой кубик, оставив остальные в исходном положении?

27) (а) Число p — простое. Доказать, что найдутся три числа x, y, z, не все делящиеся на p, сумма квадратов которых делится на p. (б) Многочлен $P(x, y, z)$ — сумма одночленов суммарной степени 2 с целыми коэффициентами. Доказать, что существуют x, y, z, не все делящиеся на p, при которых $P(x, y, z)$ делится на p. (Число p — простое.)

28) Можно ли вернуть в исходное положение фишки игры в 15, предварительно переставив 14 и 15?

29) (а) Доказать, что если расширение поля $\mathbb{Q}$, конечномерно как векторное пространство над $\mathbb{Q}$, то все элементы расширения — алгебраические. (б) Доказать конечномерность $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{5})$. (в) Дока-

зать, что сумма, произведение и частное алгебраических чисел — алгебраические.

30) Разложить на множители $x^{p-1} - 1$ в поле вычетов по простому модулю p

31) Найти сумму $\sum_i |MA_i|^2$, если M — точка окружности единичного радиуса, а A_i — вершины вписанного в неё правильного n-угольника.

32) Числа $p_1, \dots, p_n$ — различные простые, $a_1, \dots, a_n$ — произвольные целые. Доказать, что существует целое число a сравнимое с a_i по модулю p_i для любого i.

33) Доказать, что система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = a_1 \\ x_1 + 2x_2 + \ldots + 10x_{10} = a_2 \\ \ldots \\ x_1 + 2^9 x_2 + \ldots + 10^9 x_{10} = a_{10} \end{cases}$$

разрешима при любых $a_1, a_2, \dots, a_{10}$.

34) Многочлены $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ таковы, что $P(ab, a+b) = Q(ab, a+b)$ для всех a и b. Доказать, что $P = Q$.

35) Найти (а) $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$; (б) $\sum_{k=0}^{n} kC_n^k$.

36) Семь белых или чёрных бусинок нанизывают на окружность. Сколько различных ожерелий можно получить ?

37) Существует ли многочлен P с целыми коэффициентами, для которого $P(5) = 13$, $P(10) = 8$, $P(13) = 21$?

38) Разложить на неприводимые целочисленные множители многочлены $x^{12} - 1$, $x^4 + 4$.

39) При каких действительных p и q многочлен x^2+px+q имеет ровно два различных вещественных корня?

40) Найти максимум $|z|$ при $|(z + 1)/z| = a$.

41) Функция $P(x, y)$ двух вещественных переменных с вещественными значениями — многочлен от x при любом фиксированном y и многочлен от y при любом фиксированном x. Доказать, что P — многочлен.

42) (а) Доказать, что все коэффициенты многочлена $(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-99)(x-100)$ делятся на 101 (кроме старшего коэффициента, равного 1, и свободного члена). (б) Найти остаток от деления свободного члена на 101.

43) Многочлен с действительными коэффициентами неотрицателен при всех действительных аргументах. Доказать, что его можно представить в виде суммы квадратов двух многочленов с действительными коэффициентами.

44) Доказать, что группа вращений куба изоморфна группе перестановок множества из 4 элементов.

45) Найти сумму $\varphi(d)$ по всем делителям d данного натурального n. (Здесь $\varphi(k)$ — количество чисел от 1 до k, взаимно простых с k.)

46) Число p — простое, отличное от 2 и 5. Доказать, что существует делящееся на p число, десятичная запись которого состоит из одних единиц.

47) Доказать, что если нечётное натуральное число единственным образом разлагается в сумму двух квадратов, то оно простое.

48) Многочлен с действительными коэффициентами принимает целые значения в целых точках. Могут ли все эти значения быть простыми?

Анализ

1) Первый член последовательности a_n равен 1, а каждый следующий — синусу предыдущего. Найти такое λ, что предел $\lim n^\lambda a_n$ существует и не равен 0.

2) (а) Пусть M — максимум модуля производной функции f на отрезке $[0,2\pi]$. Доказать, что $\left|\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx\right| < 2\pi M/n$.

3) (а) Функция f непрерывна на прямой. Известно, что при любом x предел последовательности $a_n = f(nx)$ равен 0. Можно ли утверждать, что $f(x)\to 0$ при $x\to\infty$? (б) Тот же вопрос для $f(n+x)$ вместо $f(nx)$.

4) Сходится ли ряд $\sum_n (\cos n)/n$?

5) (а) Найти предел последовательности $a_n = 1/(1+1/(1+\ldots(1+1/1)\ldots))$ (n дробей). (б) Доказать существование предела последовательности $a_n = 1/(x_1+1/(x_2+\ldots(x_{n-1}+1/x_n)\ldots))$ (x_i — любая последовательность положительных целых чисел).

6) Известно, что $f(x) = o(x^n)$ при $x \to 0$ (т.е. предел $f(x)/x^n$ при $x \to 0$ равен 0). Следует ли отсюда, что $f^{(n)}(0)$ существует и равно 0? (б) Тот же вопрос, если известно, что все производные в точке 0 вплоть до $(n-1)$-ой существуют. (в) Тот же вопрос, если эти производные непрерывны.

7) Функции f_n непрерывны на $[0,1]$ и для любого x из $[0,1]$ предел $f_n(x)$ равен $f(x)$. Может ли функция f быть (а) разрывной хотя бы в одной точке? (б) быть разрывной всюду? (в) быть разрывной хотя бы в одной точке, если сходимость равномерна?

8) Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ бесконечно дифференцируема, и в каждой точке хотя бы одна из производных равна 0. (а) Доказать, что существует отрезок, на котором f — многочлен. (б) Доказать, что f — многочлен.

9) Доказать, что $x > \sin x > 2x/\pi$ при $0 < x < \pi/2$.

10) Ряд из действительных чисел сходится. Может ли ряд из их кубов расходиться?

11) Функция f на отрезке $[a,b]$ называется хорошей, если множество сумм вида $\sum |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$ (x_i — возрастающая конечная последовательность точек отрезка $[a,b]$) ограничено. (а) Всякая ли дифференцируемая функция — хорошая? (б) Доказать, что дифференцируемая функция с ограниченной производной — хорошая. (в) Доказать, что хорошими являются те и только те функции, которые могут быть представлены в виде разности двух неубывающих функций.

12) (а) Бывает ли на прямой не равная 0 бесконечно дифференцируемая функция, равная 0 вне некоторого отрезка? (б) Существует ли бесконечно дифференцирумая функция f на прямой, не равная тождественно 1, для которой $f(f(x)) = 1$ при всех x?

13) (а) Доказать, что если $\lim a_n = a$, то $s_n = (a_1 + \ldots + a_n)/n$ также сходится к a. (б) Верно ли обратное?

14) (а) Может ли $\mathbb{Q}$ быть множеством точек непрерывности некоторой функции f? (б) Доказать, что любое замкнутое множество является множеством точек разрыва некоторой функции.

15) Может ли $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ быть объединением счётного числа замкнутых множеств?

16) (а) Доказать, что всякую функцию, непрерывную на замкнутом подмножестве вещественной прямой, можно продолжить до всюду

непрерывной функции. (б) Множества X и Y — замкнутые непересекающиеся подмножества $\mathbb{R}$. Доказать, что существует дифференцируемая на прямой функция, для которой X и Y являются прообразами 0 и 1.

17) Рассмотрим множество M всех дважды дифференцируемых функций f, для которых $f(0) = f(1) = 0$ и $|f''(x)| \leq C$ для любого x. Найти $\sup\{|f(x)|\}$ по всем $x \in \{0,1\}$ и $f \in M$.

18) (а) Доказать, что $n! > (n/3)^n$. (б) Доказать, что $\ln(n!)/\ln((n/e)^n) \to 1$ при $n \to \infty$.

19) Доказать, что функция, имеющая счётное число точек разрыва на отрезке, интегрируема по Риману.

20) Доказать, что для любых $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ уравнение $\sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = 0$ имеет решение.

21) Может ли ряд Тейлора функции сходиться в некоторой точке к числу, отличному от значения функции в этой точке?

22) Доказать, что производная дифференцируемой на интервале функции вместе с любыми двумя значениями принимает и все промежуточные.

23) Пусть $g(x) = x + \sin x$. Найти предел $g(g(g \ldots g(x) \ldots))$ (n раз) при $n \to \infty$.

24) Всякое ли замкнутое множество мощности континуум содержит интервал?

25) Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и $f(f(x)) = x$ при всех x. Доказать, что существует такое x, что $f(x) = x$.

26) Доказать, что любая последовательность содержит монотонную подпоследовательность.

27) При каких x сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$?

28) (а) Доказать, что равномерно непрерывная на интервале функция ограничена. (б) Верно ли обратное?

29) Функция f дифференцируема на $(0,1)$ и $f' = f$. Найти все такие f.

30) (а) Найти все непрерывные $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых $f(a + b) = f(a) + f(b)$ и $f(ab) = f(a)f(b)$. (б) Та же задача без требования непрерывности.

31) Для каких x последовательность $\sin nx$ сходится?

32) Последовательность задана формулами $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = (a_n + 2/a_n)/2$. Доказать, что предел последовательности равен $\sqrt{2}$. Оценить скорость сходимости.

33) Построить взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и множеством чисел вида $m/2^n$ для целых m и n, сохраняющее порядок.

34) Построить функцию f, являющуюся отношением двух многочленов с рациональными коэффициентами, для которой последовательность $x_1 = 1$, $x_{n+1} = f(x_n)$ сходится к $\sqrt[3]{2}$.

35) Известно, что $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$, $x_1 = 5$, $x_2 = 7$. Найти x_{1001}/x_{1000} с точностью до 0,001.

36) При каких α, β, γ точки $\langle\{\alpha n\}, \{\beta n\}, \{\gamma n\}\rangle$ (при $n = 1, 2, 3, \ldots$) плотны в единичном кубе? ($\{s\}$ — дробная часть s.)

37) Найти все непрерывные на $(0, +\infty)$ функции f, для которых $f(2x) = 2f(x)$, $f(3x) = 3f(x)$ при всех положительных x.

38) Найти точную верхнюю грань множества значений функции $\sin x + \sin\sqrt{2}x$.

39) Периодична ли функция $\sin x + \sin\sqrt{2}x$?

40) Доказать, что множество точек разрыва первого рода (когда существуют односторонние пределы) любой функции не более чем счётно.

41) Найти функцию, принимающую все рациональные значения на любом рациональном интервале.

42) Доказать, что выпуклая функция (у которой любой кусок графика лежит под стягивающей его хордой) непрерывна.

43) Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема всюду, положительна на интервале (a, b); $f(a) = f(b) = 0$, $f(x) + f''(x) < 0$ при $a < x < b$. Доказать, что $|b - a| \leq \pi$.

44) Найти производную функции $f(x) = x^x$.

45) Доказать, что функция $f(x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \ldots$ определена и дифференцируема на интервале $(-1, 1)$. Найти f'.

46) Найти бесконечно дифференцируемые функции f, g на прямой, для которых множество всех точек $\langle f(t), g(t)\rangle$ есть граница треугольника.

47) Положительная непрерывно дифференцируемая на прямой функция f такова, что $|f'(x)| \leq |f(x)|$. Доказать, что $|f(100)| \leq e^{100}|f(0)|$.

48) Бесконечно дифференцируемая функция f на прямой такова, что $f(x)+f(2x)+f(3x)=0$ при всех x. Можно ли утверждать, что f тождественно равна 0?

49) Функция f дважды непрерывно дифференцируема на прямой. Доказать, что предел $\lim_{h\to 0}[f(x+h)+f(x-h)-2f(x)]/h^2$ существует и равен $f''(x)$.

50) Может ли бесконечно дифференцируемая на прямой функция иметь бесконечно много корней на интервале $(0,1)$ и не равняться 0 тождественно? Тот же вопрос для суммы степенного ряда (сходящегося при всех x).

51) Найти первообразные функций $1/(2+3x)$, $1/(x^2+3x+2)$, $\ln x$.

52) Бесконечно дифференцируемая на прямой функция имеет период 1. Доказать, что предел среднего арифметического значений функции f в точках $0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n$ равен $\int_0^1 f(t)\,dt$. Оценить скорость сходимости (ответ: $o(1/n^k)$ при любом k).

53) Построить такую последовательность бесконечно дифференцируемых функций f_k на $[-1,1]$, что для любой непрерывной на этом отрезке функции g выполняется равенство $g(0) = \lim_{k\to\infty}\int_{-1}^1 f_k(t)g(t)\,dt$.

54) Ряд $\sum a_i$ с положительными членами расходится, S_i — последовательность его частичных сумм. (а) Доказать, что ряд $\sum a_i/S_i$ расходится. (б) Доказать, что ряд $\sum a_i/S_i^2$ сходится.

55) Конечна ли сумма $1/n$ по всем натуральным n, десятичная запись которых не содержит восьмерок?

56) Члены ряда $\sum a_i$ неотрицательны и убывают. Доказать, что он сходится или расходится одновременно с рядом $a + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$

57) Конечны ли суммы (а) $1/(m^2+n^2)$ (б) $1/\text{НОК}(m,n)$ по всем парам натуральных чисел m,n?

58) Доказать, что существуют такие A, B, C, что $1+1/2+1/3+\ldots+1/n = C + \ln n + A/n + B/n^2 + o(1/n^2)$. Найти A, B.

59) Конечна ли сумма $1/p$ по всем простым p?

60) Доказать, что $\int_x^{x+1} \sin t^2\,dt < 2/x$ при $x > 0$.

61) Если $f((x+y)/2) \leq (f(x)+f(y))/2$ для непрерывной функции f, то эта функция выпукла.

62) Доказать, что выпуклая функция дифференцируема всюду, кроме счётного множества точек.

Геометрия

1) Доказать, что взаимно однозначное отображение координатной плоскости в себя линейно тогда и только тогда, когда оно переводит 0 в 0 и любую прямую — в прямую.

2) На какие отрезки делят диагональ n-мерного куба проекции его вершин?

3) В $\mathbb{R}^k$ имеются n векторов, все углы между которыми — тупые. Доказать, что $n \leq k+1$.

4) Сфера стереографически проектируется на плоскость и при этом может вращаться вокруг неподвижного центра. Возникают отображения плоскости в себя. Доказать, что это — дробно-линейные преобразования.

5) Если у ограниченной фигуры есть несколько осей симметрии, то все они пересекаются в одной точке.

6) Описать все конечные подгруппы группы подобий плоскости.

7) Найти явную формулу для чисел Фибоначчи.

8) Векторы $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис евклидова пространства, $a_1, \ldots, a_n$ — произвольные числа. Доказать, что существует вектор x, для которого $(x, e_i) = a_i$.

9) Доказать, что в треугольнике со сторонами a, b, c и радиусом описанной окружности R расстояние между центром описанной окружности и ортоцентром равно $\sqrt{9R^2 - a^2 - b^2 - c^2}$.

10) В последовательности векторов скалярный квадрат каждого равен 2, а скалярное произведение соседних, а также первого и последнего, равно -1. Могут ли векторы быть линейно независимы?

11) При каких условиях композиция трех поворотов плоскости с заданными центрами и углами равна тождественному преобразованию?

12) Построить окружность, проходящую через две данные точки и пересекающую данную окружность под данным углом.

13) На катетах треугольника построены квадраты. Доказать, что центры этих квадратов и середина гипотенузы являются вершинами прямоугольного равнобедренного треугольника.

14) Найти расстояние от точки n-мерного пространства до гиперплоскости в этом пространстве, если точка задана координатами, а гиперплоскость — уравнением.

15) Доказать, что сумма косинусов двугранных углов тетраэдра не больше 2.

16) (а) Найти все дробно-линейные преобразования, отображающие единичный круг $|z| < 1$ на себя. (б) То же для полуплоскости $Im\, z > 0$.

17) Сопоставим с каждым дробно-линейным преобразованием $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ матрицу $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ Доказать, что композиции преобразований соответствет произведение матриц.

18) Доказать, что если некоторое подпространство в $\mathbb{R}^n$ представлено в виде объединения конечного числа подпространств, то оно совпадает с одним из них.

19) Доказать, что выпуклая оболочка любого конечного множества в $\mathbb{R}^n$ может быть представлена как пересечение конечного числа гиперплоскостей.

20) Доказать, что при преобразовании плоскости $\langle x, y\rangle \mapsto \langle x+y, y\rangle$ круг переходит в фигуру, имеющую оси симметрии, и найти их.

21) Найти ортогональную проекцию вектора $x \mapsto x^2$ в пространстве функций со скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ на плоскость, порожденную векторами x, $\sin x$.

22) Вокруг данного эллипсоида описываются всевозможные прямоугольные параллелепипеды. Доказать, что диагонали всех этих параллелепипедов равны.

23) Найти последовательность многочленов степени $0, 1, \dots, n$, ортогональных относительно скалярного произведения $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ (а) при $n = 4$; (б) при произвольном n.

24) При каких условиях заданный эллипс может быть получен как сечение заданного эллипсоида?

25) Доказать, что пятая по величине (считая от максимальной) ось n-мерного эллипсоида есть максимум малой оси всех пятимерных эллипсоидов, являющихся его сечениями.

26) Центры правильных треугольников, построенных на сторонах произвольного треугольника, образуют правильный треугольник.

27) Доказать, что площадь треугольного сечения тетраэдра не превосходит площади некоторой из его граней.

28) Три корня кубического многочлена с комплексными коэффициентами образуют треугольник. Доказать, что в этот треугольник можно вписать эллипс, фокусы которого находятся в корнях производной этого многочлена.

29) Три вектора в пространстве образуют друг с другом углы A, B, C. Доказать, что $\cos A + \cos B + \cos C \geq -3/2$.

30) Доказать, что расстояние d между центрами вписанной в треугольник окружности и описанной около него окружности связано с их радиусами r и R соотношением $d^2 = R^2 - 2Rr$.