Лекция 9
Формальные функции

▹Формальные операции над степенными рядами ▹Экспоненты, логарифмы и логарифмичесие производные ▹Формула Ньютона для бинома ▹Действие $k[[d/dx]]$ на $k[x]$ ▹Числа Бернулли и многочлены Бернулли, суммирование степеней ▹Метод производящих функций: числа Каталана и формулы Ньютона для выражения степенных сумм через многочлены $e_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$

§1. Экспонента, логарифм, бином

1.1. Формальные операции над формальными рядами. Под *формальной операцией* в кольце $k[[t]]$ мы будем понимать правило, сопоставляющее некоторым конечным наборам рядов $f_1, f_2, \dots, f_n$ с теми или иными свойствами (например, *всем* наборам из двух рядов f_1, f_2) новые ряды $g = g(f_1, f_2, \dots, f_n) \in k[[t]]$ так, что для вычисления каждого из коэффициентов ряда $g(f_1, f_2, \dots, f_n)$ достаточно произвести конечное число действий сложения, вычитания, умножения и деления над конечным числом коэффициентов рядов из набора $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Два примера формальных операций, — сложение и умножение, – нам давно знакомы. Ниже мы приведем другие примеры.

1.1.1. Подстановка ряда в ряд. Если $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$ – любой ряд, а

$$s(t) = s_k t^k + s_{k+1} t^{k+1} + \cdots\ , \quad k \geq 1\ ,$$

– ряд без свободного члена, то определен результат *подстановки* s в $f(t)$ вместо t:

$$f(s(t)) = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu (s_k t^k + s_{k+1} t^{k+1} + \cdots)^\nu \in k[[t]]\ .$$

Действительно, каждый из рядов $a_\nu s(t)^\nu$ начинается с $t^{k\nu}$, и каждый коэффициент в них может быть вычислен за конечное число операций. Поэтому для вычисления каждого коэффициента в $f(s(t))$ также требуется только конечное число операций.

1.1.2. Дифференцирование в $k[[t]]$ определяется также, как в $k[t]$. Поскольку

$$\frac{x^k - y^k}{x - y} = x^{k-1} + x^{k-2} y + \cdots + x y^{k-2} + y^{k-1}\ ,$$

ряд $f(x) - f(y)$ делится на $(x-y)$ в $k[[x, y]]$ для любого ряда $f(t) \in k[[t]]$. Обозначим частное от деления $f(x) - f(y)$ на $x - y$ через $D_f(x, y)$. Ряд $\dfrac{d}{dt} f = f'(t) \overset{\text{def}}{=} D_f(t, t)$ называется *производной* от $f(t)$.

Задача 9.1. Убедитесь, что $\left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots\right)' = \sum\limits_{\nu\geq 1} \nu a_{nu} t^{\nu-1}$.

1.1.3. Лемма. *Операция $f(t) \xrightarrow{d/dt} f'(t)$ удовлетворяет обычным правилам дифференцирования суммы, разности, произведения, частного (если оно определено) и композиции (если она определена).*

Доказательство. Пусть $f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$ и $g = \sum\limits_{\nu\geq 1} b_\nu t^\nu$. Правило Лейбница для дифференцирования произведения доказывается дословно также, как и для многочленов:

$$D_{fg}(x,y) = \frac{f(x)g(x) - f(y)g(y)}{x-y} = f(x)\frac{g(x)-g(y)}{x-y} + \frac{f(x)-f(y)}{x-y}g(y) =$$

$$= f(x)D_g(x,y) + g(y)D_f(x,y)\ ,$$

что при $x = y = t$ даёт $(fg)' = f'g + g'f$.

Задача 9.2. Убедитесь, что $(f^m)' = mf^{m-1}f'$ для любого рядя f.

Докажем ещё правило дифференцирования композиции.

$$D_{f\cdot g}(x,y) = \sum_{i\geq 0} a_i \frac{g(x)^i - f(x)^i}{x-y}$$

(сумма справа определена, ибо коэффициент при каждой степени $x^\alpha y^\beta$ является конечной суммой). Это равенство показывает, что

$$(f{\cdot}g)' = \sum_{i\geq 0} a_i (g^i)' = \sum_{i\geq 0} i a_i g^{i-1} g' = f'(g(t))g'(t)$$

(мы воспользовались предыдущей задачей).

Задача 9.3. Докажите остальные правила дифференцирования.

□

1.1.4. Первообразный ряд ряда $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$ определяется как ряд без свободного члена, производная от которого равна $f(t)$. Легко видеть, что этим он определяется однозначно:

$$\int f(t)dt = \sum_{k\geq 1} \frac{a_{k-1}}{k} t^k\ .$$

1.2. Экспоненты и логарифмы. Всякий ряд $f(t)$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению $f' = f$, называется *показательным*. Записывая такой ряд f с неопределенными коэффициентами

$$f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots\ ,$$

получаем, что $k a_k = a_{k-1} \quad \forall\, k \geq 1$, откуда $a_k = \dfrac{a_0}{k!}$, и

$$f(t) = a_0 e^t\ , \quad \text{где} \quad e^t \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!}\ .$$

Ряд e^t называется *экспонентой*. Отметим, что можно рассматривать экспоненту от любого ряда без свободного члена (подставляя этот ряд вместо t в e^t).

Определим ряд $\ln(1+t)$ как первообразный от ряда

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k\geq 0}(-1)^k t^k = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots .$$

Таким образом, $\ln(1+t) \stackrel{\text{def}}{=} \int dt/(1+t) = \sum\limits_{k\geq 1}(-1)^{k+1}\dfrac{x}{k}$.

Заметим, что для любого ряда $g(t) \in k[[t]]$ со свободным членом 1 можно определить его *логарифм* $\ln(g(t))$, как результат подстановки ряда $g(t)-1$ (у этого ряда нет свободного члена!) вместо t в ряд $\ln(1+t)$. Ряд

$$\frac{d}{dt}\ln(g(t)) = \frac{g'(t)}{g(t)}$$

называется *логарифмической производной* ряда $g(t)$. Как и логарифм, логарифмическая производная определена только для рядов со свободным членом 1.

1.2.1. Лемма. *Для любых двух рядов $f(t)$ и $g(t)$ со свободным членом 1 равенства*

$$f(x) = g(x) \quad , \qquad \ln(f(x)) = \ln(g(x)) \quad , \qquad \frac{d}{dt}\ln(f(t)) = \frac{d}{dt}\ln(g(t))$$

попарно эквивалентны.

Доказательство. Импликации слева направо тривиальны, так что достаточно будет вывести первое равенство из третьего. Пусть $f(t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$ и $g(t) = 1 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots$ и пусть $\dfrac{d}{dt}\ln(f(t)) = \dfrac{d}{dt}\ln(g(t))$, т. е. $f'(t)g(t) = f(t)g'(t)$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем равенства

$$\begin{aligned}
a_1 \cdot 1 &= 1 \cdot b_1 \\
2a_2 + a_1 b_1 &= a_1 b_1 + 2b_2 \\
&\cdots \\
ka_k + \sum_{i=1}^{k-1} i a_i b_{k-i-1} &= \sum_{i=1}^{k-1}(k-i)a_{i-1}b_{k-i} + kb_k \\
&\cdots
\end{aligned}$$

которые по индукции показывают, что $a_k = b_k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.
□

1.2.2. Лемма. *В $k[[t]]$ между рядами e^t и $\ln(1+t)$ выполняются обычные соотношения $e^{\ln(1+t)} = 1 + t$ и $\ln(e^t) = t$.*

Доказательство. Продифференцируем ряд $\ln(e^t)$ как композицию рядов $f(t) = \ln(1+t)$ и $g(t) = e^t - 1$. Получим

$$(\ln(e^t))' = (f{\cdot}g)' = f'(g(t))g'(t) = \frac{1}{1+g(t)}g'(t) = \frac{e^t}{e^t} = 1 .$$

Таким образом, $\ln(e^t) = c + t$, где $c \in k$ — константа. Непосредственная подстановка $t + t^2/2 + t^3/6 + \cdots$ вместо t в ряд $t - t^2/2 + t^3/3 - \cdots$ показывает, что $c = 0$.

Первое равенство следует из второго по предыдущей лемме (в обеих частях стоят ряды со свободным членом 1 и второе равенство есть результат логарифмирования обеих частей первого равенства).
□

Задача 9.4. Докажите, что взятие экспоненты и логарифма суть взаимно обратные биекции между множеством рядов без свободного члена и множеством рядов со свободным членом 1.

1.2.3. Лемма. *Для рядов $f(t)$ и $g(t)$ со свободным членом 1 выполняется "основное свойство логарифма": $\ln(fg) = \ln(f)+\ln(g)$. Кроме того, $\ln(1/g) = -\ln(g)$ и $\ln(g^k) = k\ln(g) \quad \forall\, k\in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Левая и правая части равенства $\ln(fg) = \ln(f) + \ln(g)$ являются рядами без свободного члена, поэтому их совпадение равносильно совпадению их производных. Дифференцируя, получаем

$$\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'g + fg'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}\,.$$

Аналогично, дифференцируя $\ln(1/g)$ и $-\ln(g)$, получаем равные ряды

$$(\ln(1/g))' = \frac{(1/g)'}{1/g} = \frac{-g'/g^2}{1/g} = -g/g' = (-\ln(g))'\,.$$

Последнее утверждение леммы есть следствие двух первых.
□

Задача 9.5. Докажите, что двух рядов $f(t)$ и $g(t)$ без свободного члена выполено основное свойство экспоненты $e^{f+g} = e^f e^g$.

Задача 9.6. Убедитесь, что биекции из зад.9.4 являются гомоморфными в том смысле, что они переводят сложение на множестве рядов без свободного члена в умножение рядов со свободным членом 1

1.3. Степень $(1+t)^\alpha$ с произвольным показателем $\alpha\in k$ можно определить формально распространяя равенство $\ln(1+t)^n = n\ln(1+t)$ с целых n на произвольные $\alpha\in k$. Итак, по определению, полагаем

$$(1+t)^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} e^{\alpha\ln(1+t)}\,.$$

Свойства экспоненты гарантируют, что эта функция оправдывает своё обозначение, т. е. удовлетворяет основному соотношению

$$(1+t)^{\alpha+\beta} = e^{(\alpha+\beta)\ln(1+t)} = e^{\alpha\ln(1+t)}e^{\beta\ln(1+t)} = (1+t)^\alpha(1+t)^\beta \qquad \forall\, a,b\in k\,.$$

Задача 9.7. Убедитесь, что если показатель α – целый, то из нашего определения вытекают равенста

$$(1+t)^n = \underbrace{(1+t)\cdot\;\cdots\;\cdot(1+t)}_{n}, \qquad \text{и} \qquad (1+t)^{-n} = \underbrace{(1+t)^{-1}\cdot\;\cdots\;\cdot(1+t)^{-1}}_{n}$$

(здесь $n\in\mathbb{N}$ и $(1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$ — элемент обратный к $(1+t)$ в $k[[t]]$).

Для того чтобы отыскать явные значения коэффициентов ряда

$$(1+t)^\alpha = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \in k[[t]]\,,$$

заметим, что $a_0 = 1$ (это усматривается прямо из определения – обязательно убедитесь!) и вычислим логарифмическую призводную:

$$\frac{d}{dt}\ln(1+t)^\alpha = \frac{d}{dt}\ln e^\alpha \ln(1+t) = \frac{d}{dt}\Big(\alpha\ln(1+t)\Big) = \frac{\alpha}{(1+t)}\,.$$

Таким образом, $\Big((1+t)^\alpha\Big)'\cdot(1+t) = \alpha\cdot(1+t)^\alpha$, и сравнивая коэффициенты при t^{k-1}, мы получаем на искомые коэффициенты a_i соотношения:

$$ka_k + (k-1)a_{k-1} = \alpha a_{k-1}\ ,$$

откуда $a_k = \dfrac{a_{k-1}}{k}(\alpha-k+1) = \dfrac{a_0}{k!}\underbrace{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}_{k}$. Вспоминая, что $a_0 = 1$ и вводя обозначение

$$\binom{\alpha}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}^{k}}{k!}\ ,$$

получаем следующий результат:

1.4. Теорема. (Формула Ньютона для бинома.)

$$(1+t)^\alpha = \sum_{\nu\ge 0}\binom{\alpha}{\nu}t^\nu = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}t^3 + \cdots \qquad \forall\,\alpha\in k\ .$$

□

Именно эта теорема и была открыта И. Нютоном и известна как *бином Ньютона*. Числа $\binom{\alpha}{\nu}$ называются *биномиальными коэффициентами*. Отметим, что формула Ньютона даёт явное разложение для алгебраических функций, выражаемых в радикалах (надо взять $\alpha = 1/n$). В своём учебнике по анализу Л. Эйлер писал, что любая функция может быть разложена в ряд, в чём каждый сомневающийся легко может удостовериться, разобрав несколько примеров. Доказанная в конце прошлой лекции теорема может восприниматься как один из способов придания точного смысла этим словам Эйлера, а бином Ньютона – как один из наиболее убедительных примеров.

§2. Разностные операторы на кольце многочленов

2.1. Обозначения. Пусть k – поле характеристики нуль. Рассмотрим кольцо многочленов $k[x]$ как (бесконечномерное) векторное пространство над полем k. Будем называть *линейным оператором* на $k[x]$ всякий k-линейный эндоморфизм $k[x] \xrightarrow{\varphi} k[x]$ как векторного пространства[1] над k. Всякий линейный оператор Φ на $k[x]$ однозначно определяется заданием последовательности многочленов

$$\varphi_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(x^n)\quad ,\qquad n = 0\,,\ 1\,,\ 2\ \ldots\ .$$

[1] это означает, что $\varphi(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g)\ \forall\,\alpha,\beta\in k$ и $\forall\, f,g\in k[x]$, но вообще говоря, $\varphi(fg)\neq\varphi(f)\varphi(g)$

В самом деле, вследствие линейности

$$\Phi(a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m) = a_0\varphi_n(x) + a_1\varphi_{n-1}(x) + \cdots\ a_m\varphi_0(x)\ .$$

Примерами линейных операторов на кольце многочленов являются:

оператор сдвига $T_a:\ f(x) \longrightarrow T_af(x) \overset{\text{def}}{=} f(x+a)$;

разностный оператор $\Delta_a = T_a - 1:\ f(x) \longrightarrow \Delta_af(x) \overset{\text{def}}{=} f(x+a) - f(x)$;

и оператор дифференцирования $\dfrac{d}{dx}:\ f(x) \longrightarrow f'(x)$.

Через T и Δ мы будем далее обозначать, соответственно, операторы T_1 и $\Delta_1 = T - 1$, так что

$$Tf(x) \overset{\text{def}}{=} f(x+1) \qquad , \qquad \Delta f(x) \overset{\text{def}}{=} f(x+1) - f(x)\ .$$

2.2. Действие $k\left[\left[\dfrac{d}{dx}\right]\right]$ на $k[x]$. Для каждого формального ряда $F(t) = \sum\limits_{\nu\geq 0} a_\nu t^\nu \in k[[t]]$ определим оператор

$$F\left(\frac{d}{dx}\right) :\ k[x] \longrightarrow k[x]:\quad f \longmapsto F\left(\frac{d}{dx}\right) f \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu\geq 0} \frac{d^\nu f}{dx^\nu}$$

(правая часть имеет смысл поскольку $\dfrac{d^\nu f}{dx^\nu}$ при $k > \deg(f)$, и стало быть, сумма справа конечна для каждого конкретного f).

Задача 9.8. Проверьте, что тем самым мы определили гомоморфизм из кольца $k[[t]]$ в кольцо линейных операторов на $k[x]$ (кольцевыми операциями в последнем являются сложение и композиция).

Совокупность всех операторов на $k[x]$, представимых в виде ряда от $\dfrac{d}{dx}$, является коммутативным подкольцом, котров мы обозначим через $\mathcal{A}$ и будем называть *кольцом разностных операторов* на $k[x]$ (смысл этого названия мы объясним чуть позже).

2.2.1. Лемма. (Формула Тейлора[2] .) $T_a = e^{a\frac{d}{dx}}$.

Доказательство. Поскольку действие линейного оператора однозначно определяется его действием на базис, достаточно проверить, что $e^{a\frac{d}{dx}}x^n = T_ax^n = (x+a)^n$. Это следует из разложения бинома:

$$e^{a\frac{d}{dx}}x^n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a^\nu d^\nu x^n}{\nu! dx^\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a^\nu x^{n-\nu} = (x+a)^\nu\ .$$

□

Линейные операторы $\Phi \in \mathcal{A}$ замечательны тем, что к ним применима вся предыдущая машинерия формальных тождеств в $k[[t]]$. Мы проиллюстрируем это на одном классическом примере.

[2] В более традиционных терминах формула Тейлора означает, что для любого многочлена $f \in k[x]$ степени n и любого $a \in k$ выполнено тождество

$$f(x+a) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x)a^\nu = f(x) + f'(x)a + \frac{1}{2}f''(x)a^2 + \frac{1}{6}f'''(x)a^3 + \cdots\ .$$

2.3. Пример: обращение Бернулли. Разностный оператор Δ представим в виде

$$\Delta = T - 1 = e^{\frac{d}{dx}} - 1 = U\left(\frac{d}{dx}\right) \cdot \frac{d}{dx}\ ,$$

где $U(t) = \dfrac{e^t - 1}{t} \in k[[t]]$ является обратимым рядом со свободным членом 1, а стало быть, $U\left(\dfrac{d}{dx}\right)$ является изоморфизмом векторного пространства $k[x]$ на себя. Оператор

$$B\left(\frac{d}{dx}\right) = U^{-1}\left(\frac{d}{dx}\right)$$

называется *оператором Бернулли*. Он получается подстановкой $t = \dfrac{d}{dx}$ в формальный ряд $B(t) = \dfrac{t}{e^t - 1}$. Явное разложение $B(t)$ по степеням t традиционно записывают в виде

$$B(t) = \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{\nu \geq 0} \frac{b_\nu}{\nu!} t^\nu\ .$$

Числа[3] $b_\nu \in \mathbb{Q}$ называются *числами Бернулли* и возникают в самых различных областях математики. Для их вычисления имеется простая реккурентная формула. Прежде всего, понятно, что $b_0 = 1$. Далее, раскладывая $B(t)$ в сумму чётной и нечетной составляющей

$$B(t) = B_+(t) + B_-(t) \quad , \qquad \text{где} \quad B_\pm(t) = \frac{B(t) \pm B(-t)}{2}\ ,$$

немедленно получаем, что

$$B_-(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{e^{-t} - 1}\right) = -\frac{t}{2}\ ,$$

что означает, что за исключением $b_1 = -1/2$ все прочие коэффициенты b_ν с *нечётными* номерами равны нулю[4]. Наконец, приравнивая коэффициенты при t^{n+1} в формуле

$$t = (e^t - 1)B(t) = \Big(\sum_{\mu \geq 1} \frac{1}{\mu!} t^\nu\Big)\Big(\sum_{\nu \geq 0} \frac{b_\nu}{\nu!} t^\nu\Big)\ ,$$

получаем соотношение

$$\sum_{\nu=0}^{n} \frac{b_\nu}{\nu!(n - \nu + 1)!} = 0 \qquad (\text{при } n \geq 2)\ ,$$

[3]очевидно, что b_ν находятся в простом подполе поля k, которое по нашему предположению ($\mathrm{char}\, k = 0$) можно канонически отождествить с полем рациональных чисел

[4]напротив, для чётных коэффициентов имеем

$$B_+(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{e^t - 1} - \frac{t}{e^{-t} - 1}\right) = \frac{t}{2} \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{e^t - 2 + e^{-t}} = \frac{t}{2} \cdot \frac{\left(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}\right)\left(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}\right)}{\left(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}\right)^2} = \frac{t}{2} \cdot \frac{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{t}{2} \cdot \mathrm{cth}\left(\frac{t}{2}\right)\ ;$$

ряд $\mathrm{cth}(t) = \sum\limits_{\alpha \geq 1} \dfrac{2^{2\alpha - 1}}{(2\alpha - 1)!} b_{2\alpha} t^{2\alpha - 1}$ называется *гиперболическим котангенсом*.

Из которого получается реккурентная формула

$$b_n = -n! \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{b_\nu}{\nu!(n-\nu+1)!} = -\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n+1}{\nu} b_\nu \ , \tag{9-1}$$

справедливая при $n \geq 2$.

Задача 9.9. Вычислите первые 10 чисел Бернулли.

Ответ: отличные от нуля b_ν с $\nu \leq 10$ суть

$$b_0 = 1 \ , \quad b_1 = -\frac{1}{2} \ , \quad b_2 = \frac{1}{6} \ , \quad b_4 = -\frac{1}{30} \ , \quad b_6 = \frac{1}{42} \ , \quad b_8 = -\frac{1}{30} \ , \quad b_6 = \frac{5}{66} \ .$$

Задача 9.10. Докажите, что последовательность чисел Бернулли с чётными номерами является знакопеременной.

Предыдущее вычисление впервые было предпринято Якобом Бернулли для решения следующей задачи:

2.3.1. Задача Бернулли: получить формулу, выражающую сумму

$$S_k(n) = 0^k + 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

в виде многочлена от n (при фиксированном k).

Для получения явного выражения для целозначного многочлена $S_k(x) \in \mathbb{Q}[x]$, вычисляющего предыдущую сумму при подстановке целых $x = n \in \mathbb{Z}$, Бернулли заметил, что прямо по определению S_k имеем

$$\Delta S_k(x) = (x+1)^k$$

(эта фомула выполняется для всех $x \in \mathbb{N}$, и следовательно является тождеством в $\mathbb{Q}[x]$). Поскольку $\Delta = B^{-1}\left(\frac{d}{dx}\right) \cdot \frac{d}{dx}$, мы получаем на $S_k(x)$ дифференциальное уравнение

$$S_k'(x) = B\left(\frac{d}{dx}\right)(x+1)^k = B_k(x+1) \ ,$$

где $B_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} B\left(\frac{d}{dx}\right) x^k = \sum\limits_{\nu\geq 0} \frac{b_\nu}{\nu!} \frac{d^\nu x^k}{dx^\nu} = \sum\limits_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} b_\nu x^{k-\nu}$ — многочлены[5], определяющие действие оператора B на стандартный базис в $k[x]$. Сами B_k также связаны дифференциальным соотношением

$$B_{k+1}'(x) = \frac{d}{dx} B\left(\frac{d}{dx}\right) x^{k+1} = B\left(\frac{d}{dx}\right) \frac{d}{dk} x^{k+1} = (k+1) B\left(\frac{d}{dx}\right) x^k = (k+1) B_k(x) \ ,$$

из которого следует, что $S_k'(x) = \frac{1}{k+1} B_{k+1}'(x+1)$, т. е. $S_k(x)$ и $\frac{1}{k+1} B_{k+1}(x+1)$ различаются на константу. Подставляя $x = 1$ получаем $S_k(1) = 1$ и

$$\frac{1}{k+1} B_{k+1}(1) = \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} b_\nu = b_k - \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{k} b_k - \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{k+1} b_{k+1} = -\frac{b_{k+1}}{k+1}$$

(мы воспользовались реккурентной формулой (9-1) для чисел Бернулли). Нами доказано

[5] они называются *многочленами Бернулли*

2.3.2. Предложение. (Формула Бернулли.)

$$S_k(n) = 0^k + 1^k + 2^k + \cdots + n^k = \frac{B_{k+1}(n+1) - b_{k+1}}{k+1} .$$

□

Задача 9.11. Вычислите первые 11 многочленов Бернулли.

Подсказка:
$B_0(x) = 1$
$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$
$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$
$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$
$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$
$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x$

Задача 9.12. Докажите, что для многочленов Бернулли имеется рекурентная формула

$$B_k(x) = x^k - \frac{1}{k+1}\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k+1}{\nu+1} B_{k-\nu}(x) .$$

Задача 9.13. Решив свою задачу, Якоб Бернулли не без гордости записал, что "сумел вычислить сумму десятых степеней первой тысячи натуральных чисел менее, чем за половину четверти часа". Сумеете ли Вы повторить его результат?
Подсказка: $B_{11}(x) = x^{11} - \dfrac{11}{2}x^{10} + \dfrac{55}{6}x^9 - 11x^7 + 11x^5 - \dfrac{5}{3}x^3 + \dfrac{5}{6}x$.

2.4. Объяснение термина "разностный оператор". Поскольку $\forall f \in k[x]$ имеем $\deg(\Delta f) < \deg(f)$,

Задача 9.14. Убедитесь в этом.

для каждого формального ряда $F(t) = f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \cdots \in k[[t]]$ можно, как и выше, определить оператор

$$f(\Delta) : \quad f(x) \longmapsto \sum_{\nu \ge 0} f_\nu \Delta^\nu f .$$

Благодаря тождеству $\ln(e^t) = t$ мы можем представить оператор дифференцирования $\dfrac{d}{dx}$ в виде ряда по $\Delta = T - 1 = e^{-\frac{d}{dx}} - 1$:

$$Dx = \ln(e^{\frac{d}{dx}} = \ln(1+\Delta) = \sum_{\nu \ge 1} (-1)^{\nu-1}\frac{\Delta^\nu}{\nu} = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \cdots .$$

Таким образом, всякий линейный оператор, представимый в виде ряда по $\dfrac{d}{dx}$, представим и в виде ряда по степеням разностного оператора Δ, т. е. алгебра $\mathcal{A}$ есть алгебра степенных рядов от разного оператора.

2.5. Теорема. *Следующие условия на линейный оператор* $k[x] \xrightarrow{\Phi} k[x]$ *попарно эквивалентны:*

(i) Φ *перестановочен с* Δ: $\Phi\Delta = \Delta\Phi$;

(ii) Φ *перестановочен с* T: $\Phi T = T\Phi$;

(iii) Φ *перестановочен со всеми операторами сдвига:* $\Phi T_a = T_a \Phi \quad \forall\, a \in k$;

(iv) Φ *имеет вид* $\Phi = F\left(\dfrac{d}{dx}\right)$ *для некоторого* $F \in k[[t]]$;

(v) Φ *имеет вид* $\Phi = F(\Delta)$ *для некоторого* $F \in k[[t]]$.

Доказательство. Замечания перед теоремой делают тривиальными все импликации сницу вверх. Поэтому достаточно проверить, что из первого условия следует последнее. Для этого мы выберем в пространстве $k[x]$ специальный базис, состоящий из многочленов

$$f_0 \overset{\text{def}}{=} 1 \qquad \text{и} \qquad f_k(x) \overset{\text{def}}{=} \binom{x}{k} = \frac{1}{k!}\underbrace{x(x-1)\cdots(x-k+1)}_{k},$$

которые замечательны тем, что $\Delta f_k = f_{k-1} \quad \forall\, k \geq 1$.

Задача 9.15. Проверьте это соотношение и убедитесь, что f_k и в самом деле составляют базис пространства $k[x]$ над k.

Для каждого $k \geq 0$ обозначим через $a_k \in k$ значение многочлена $\Phi(f_k)$ при $x = 0$ (т. е. свободный член этого многочлена). Так как все многочлены $f_k(x)$ с $k \geq 1$ обращаются в нуль при $x = 0$, коэффициенты λ_ν из разложения

$$\Phi(f_k) = \sum_{\nu \geq 0} \lambda_\nu f_\nu$$

равны $\lambda_\nu = \Delta^\nu \Phi\, f_k\,(0) = \Phi \Delta^\nu\, f_k\,(0) = \Phi\, f_{k-\nu}(0) = a_{k-nu}$ (и в частности, все $a_\nu = 0$ при $\nu > k$). Но тогда

$$\Phi(f_k) = \sum_{\nu=0}^{k} a_{k-\nu} f_\nu = \sum_{\alpha \geq 0} a_\alpha \Delta^\alpha\, f_k\,,$$

откуда $\Phi = \sum a_\alpha \Delta^\alpha$.

□

§3. Производящие функции

3.1. Описание метода. Пусть $(a_\nu) = a_0,\, a_1,\, a_2,\, \dots$ – последовательность элементов произвольного коммутативного кольца K. Формальный степенной ряд

$$A(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \in K[[t]]$$

называется *производящей функцией* для последовательности (a_ν). Производящая функция исключительно полезна в ситуации, когда какие-либо свойства последовательности (a_ν) приводят к алгебраическому или дифференциальному уравнению на $A(t)$ в кольце $K[[t]]$. В этом случае использование техники формальных функций обычно позволяет устанавливать новые нетривиальные свойства последовательности $(a_\nu$, невидные непосредственно из её определения.

Мы проиллюстрируем этот метод исследования несколькими примерами.

3.2. Пример: числа Каталана. Чтобы вычислить сумму $(n+1)$ чисел

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,,$$

мы должны выполнить n написанных выше операций "+" в той или иной допустимой последовательности. Количество таких последовательностей (или иначе, количество допустимых расстановок $n+1$ пар скобок в предыдущей сумме) называется n-ым *числом Каталана* c_n. Очевидно, что $c_n < n!$. Мы собираемся получить явную формулу, выражающую c_n через n.

Заметим, прежде всего, что количество способов упорядочения действий, приводящих к тому, что последним выполняется i-тый слева знак "+" (где $i = 1, 2, \ldots, n$), равно $c_{i-1}c_{n-i-1}$. Это приводит к рекурентной формуле

$$c_n = c_0c_{n-1} + c_1c_{n-2} + \cdots + c_{n-2}c_1 + c_{n-1}c_0$$

(где мы для единоообразия положили $c_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$). Эта формула означает, что производящая функция

$$C(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + \cdots \in \mathbb{Q}[[t]]$$

удовлетворяет квадратному уравнению $C(t)-1 = tC(t)^2$ (написанная выше рекурентная формула сравнивает коэффициенты при t^n в левой и правой части). Решая это уравнение относительно $C(t)$, получаем

$$C(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t}\,,$$

где $\pm\sqrt{1-4t}$ суть два решения уравнения $x^2 = 1-4t$ в целостном кольце $\mathbb{Q}[[t]]$. Одним из этих решений будет, очевидно, бином

$$(1-4t)^{1/2} = \sum_{\nu\geq 0} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!} 4^\nu \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-\nu+1\right)}_{\nu} t^\nu\,,$$

а другое отличается от него знаком. Поскольку $c_0 = 1$, искомая нами функция $C(t)$ получится при выборе знака "+". Получаем окончательно:

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{1}{2t}\sum_{\nu\geq 1}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}4^\nu\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-\nu+1\right)t^\nu = \\ &= \sum_{\nu\geq 1} 2^{\nu-1}\frac{1\cdot(2\cdot 1-1)\cdot(4\cdot 1-1)\cdot\cdots\cdot(2(\nu-1)-1)}{\nu!}t^{\nu-1} = \\ &= \sum_{\nu\geq 1}\frac{\big(2(\nu-1)\big)!}{\nu!(\nu-1)!}t^{\nu-1} = \sum_{k\geq 0}\binom{2k}{k}\frac{t^k}{k+1} \end{aligned}$$

(при переходе от первой строки ко второй мы умножили каждый из ν множителей в числителе дроби на 2, отщепив эти ν двоек из 4^ν, и сменили знак последних $(\nu-1)$ множителях; при переходе от второй строчки к третьей — домножили и числитель и знаменатель на $(\nu-1)!$, что в сочетании с $2^{\nu-1}$ дополняет числитель до полного факториала).

Итак,

$$c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

(в частоности, это число всегда является целым!).

3.3. Пример: формулы Ньютона для выражения симметрических многочленов

$$p_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$$

через элементарные симметрические многочлены $e_i(x)$ получаются следующим образом.

Рассмотрим кольцо $K = \mathbb{Q}[\, x_1, x_2, \ldots, x_n \,]$. Элементарные симметрические многочлены $e_0, e_1, \ldots, e_n$ (мы полагаем $e_0 \equiv 1$) представляют собой конечную последовательность элементов этого кольца. Производящей функцией для этой последовательности является

$$E(t) = (1 + x_1 t)(1 + x_2 t) \ldots (1 + x_n t) \in K[t] \subset K[[t]]\,.$$

Степенные суммы p_k, $k \geq 1$, составляют бесконечную последовательность в K. Удобно записать производящую функцию для p_k в виде ряда

$$P(t) = \sum_{\nu \geq 0} p_{\nu+1} t^\nu = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu \geq 0} x_i^{\nu+1} t^\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 - x_i t}$$

(последнее равенство получается по формуле суммирования геометрической прогрессии). Из свойств логарифма получаем, что

$$P(t) = \frac{d}{dt} \ln E(-t) = \frac{E'(-t)}{E(-t)}\,.$$

Сравнивая в раенстве $P(t)E(-t) = E'(-t)$ коэффициенты при t^{k-1} слева и справа, получаем

$$\sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu e_\nu p_{k-\nu} = (-1)^{k-1} k e_k$$

(мы считаеи, что $e_\nu = 0$ при $\nu > n$). Таким образом возникает рекурентная формула, позволяющая последовательно выразить p_1, p_2, p_3, … через элементарные симметрические функции:

$$p_k = (-1)^{k-1} e_k - \sum_{\nu=1}^{k-1} (-1)^\nu e_\nu p_{k-\nu} \quad , \qquad \text{где} \quad e_\nu = 0 \quad \text{при} \quad \nu > n\,.$$

Это и есть *формула Ньютона для степенных сумм.*

Отметим, что и наоборот, можно выразить элементарные симметрические функции через суммы степеней, но правда, с рациональными коэффициентами:

$$e_k = -\frac{1}{k} \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu p_{\nu+1} e_{k-1-\nu}\,.$$

Задача 9.16. Докажите, что произведения степенных сумм

$$p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_n^{m_n}$$

составляют $\mathbb{Q}$-базис пространства симметрических многочленов над полем $\mathbb{Q}$ (т. е. что всякий симметрический многочлен из $\mathbb{Q}[\, x_1, x_2, \ldots, x_n \,]$ можно единственным образом представить в виде многочлена с рациональными коэффициентами от первых n степенных сумм $p_1, p_2, \ldots, p_n$).