Письменная экзаменационная работа по алгебре за первый семестр первого курса

Лектор: А. Городенцев. Преподавтели: В. Долотин и С. Кулешов

Задача 1. (8 баллов) Разложение перестановки $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ в произведение независимых циклов состоит из k_1 циклов длины 1, k_2 циклов длины 2, k_3 циклов длины 3, $\dots$, k_n циклов длины n. Получите формулу, которая выражает число всех перестановок, сопряжённых с σ, через n и $k_1, k_2, \dots, k_n$.

Задача 2. (6 баллов) Для каких простых чисел p существует ненулевой гомоморфизм из кольца целых гауссовых чисел Γ в кольцо $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

Задача 3. (10 баллов) Пусть $n \geqslant m$ и пусть d_k (где $k = 0, 1, 2, \dots$) — определитель матрицы, которая получается из матрицы

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_0 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n & & & \\ & a_0 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_0 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n \\ & & & & b_0 & \dots & b_{m-1} & b_m \\ & & & \iddots & & \iddots & \iddots & \\ & & \iddots & & \iddots & \iddots & & \\ & b_0 & \dots & b_{m-1} & b_m & & & \\ b_0 & \dots & b_{m-1} & b_m & & & & \end{pmatrix}}_{m+n} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \end{matrix}$$

выкидыванием по k строк и k столбцов свеху, снизу, слева и справа (т. е. выкидыванием внешнего контура толщины k). Докажите, что индекс первого ненулевого члена последовательности d_0, d_1, d_2, $\dots$ равен степени наибольшего общего делителя пары многочленов $A = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ и $B = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m$ (предполагается, что a_0 и b_0 отличны от нуля).

Задача 4. (4 балла) Приводим ли многочлен $x^6 + x^3 + 1$ над кольцом $\mathbb{Z}$?

Задача 5. (10 баллов) Рассмотрим целую решётку $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$ и выберем в ней три линейно независимых над $\mathbb{R}$ целых вектора v_1, v_2, $v_3 \in \mathbb{Z}^3$. Пусть $L \subset \mathbb{Z}^3$ — $\mathbb{Z}$-подмодуль, порождённый этими векторами, $\varPi$ — натянутый на эти векторы параллелепипед, а M — матрица, составленная из столбцов координат векторов v_i.

а) Совпадают ли числа:

(А) объём $\varPi$ (т. е. $|\det M|$);

(Б) число элементов в фактормодуле $\mathbb{Z}^3/L$;

(В) $в + г/2 + р/4 + 1$, где $в$, $г$ и $р$ – число целых точек, попадающих строго внутрь самого $\varPi$, строго внутрь его граней и строго внутрь его рёбер соответственно.

б) Что изменится, если рассматриваются n независимых целых векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$ n-мерной решётки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$?

Задача 6.

а) (4 балла) Может ли число $\sqrt[m]{p_1 p_2 \cdots p_s}$ быть рациональным, если $m \geqslant 2$ – натуральное, а $p_1, p_2, \ldots, p_s$ – попарно разные простые числа?

б)* **(дополнительная трудная задача**[1]**)** Будут ли числа $\sqrt{p} \in \mathbb{R}$ (p пробегает множество всех простых натуральных чисел) линейно независимы над $\mathbb{Q}$?

[1] 10 баллов, не влияющих на отметку