Домашний письменный экзамен
ПО АЛГЕБРЕ
за первый семестр первого курса

Лектор: А. Городенцев. Преподавтели: В. Долотин и С. Кулешов

Письменный домашний экзамен является официальным способом получить отметку по курсу алгебры за первый семестр и имеет *точно такой же статус*, как и письменный экзамен, проходивший 12 декабря 1996 года, и письменный экзамен который планируется провести в феврале.

В экзамене могут принять участие все желающие. Для этого необходимо в воскресенье 16 февраля 1997 года в $10^{\underline{00}}$ *лично прийти* в в МК НМУ, имея при себе *письменное решение* задач из предлагаемого ниже списка. Экзамен будет состоять в беседе с экзаменатором, цель которой – проверка Вашей письменной работы. Полное решение каждой задачи оценивается в 10 баллов[1]. Для получения оценки «отлично» достаточно набрать не менее 75 баллов, для получения оценки «хорошо» — не менее 50 баллов, для получения оценки «удовлетворительно» — не менее 25 баллов.

Если Вы примете участие в нескольких экзаменах по алгебре и получите на них разные оценки, то в Вашу зачётку будет выставлена та из них, которую Вы сами выберете.

Наличие зачёта по алгебре не является обязательным для участия в любом из экзаменов, но является необходимым для получения отметки в зачётку. Те студенты, которые сдали зачёт по алгебре на мех-мате и сдали экзамен по алгебре на мех-мате с оценкой «хорошо» или «отлично» получают зачёт по алгебре автоматически. Прочие желающие получить зачёт должны обратится к преподавателям алгебры и получить от них *конкретное индивидуальное задание*, выполнения которго достаточно для получения зачёта.

Задача 1. (**«непрерывные функции»**) Пусть $\mathcal{C}$ — это кольцо непрерывных вещественнозначных функций на отрезке $[0,1]$ (с операциями поточечного сложения и поточечного умножения значений функций).

- **а)** Верно ли, что всякий идеал в $\mathcal{C}$ может быть описан как множество всех функций, зануляющихся на некотором замкнутом подмножестве?
- **б)** Установите естественное взаимно однозначное соответствие между точками отрезка и максимальными идеалами кольца $\mathcal{C}$.

Задача 2. (**«$\mathbb{Z}[\omega]$»**) Пусть $\omega = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$ и $\Omega = \mathbb{Z}[x]/(x^2+x+1) \simeq \mathbb{Z}[\omega] \subset \mathbb{C}$ – решётка, порождённая 1 и ω. Проверьте, что следующие свойства натурального простого числа $p > 1$ попарно эквивалентны друг другу:

- **а)** p перестаёт быть простым в Ω;
- **б)** p представляется в виде m^2+mn+n^2 с $m,n \in \mathbb{Z}$;
- **в)** существует ненулевой гомоморфизм колец $\Omega \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Задача 3. (**«разложение на множители»**) Разложите многочлен

$$f(x) = x^5 + x^4 + x^2 + x + 2$$

[1] речь идёт именно о задачах, а не о пунктах задач; при этом дополнительная трудная задача 10(v) не обязательна, и задача «перестановки» считается вполне решённой и без этого пункта

в кольце $\mathbb{Z}[x]$ на простые множители исследуя его образ в $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x]$ и значения в целых точках.

Задача 4. («степенные ряды») Пусть $K := \mathbb{R}[[x, y]]$ и

$$\mathcal{Q} := \{(u, v) \in K^2| \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}\}$$

На множестве $\mathcal{Q}$ есть операция сложения

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$$

а) Задайте на $\mathcal{Q}$ операцию умножения (напишите таблицу умножения для образующих элементов), которая вместе со сложением наделяет $\mathcal{Q}$ структуой коммутативного кольца с 1.

б) Задайте гомоморфизм $\mathcal{Q}$ в кольцо $M_2(\mathbb{R})$ матриц 2×2. Куда переходят образующие?

Совет. Решите такую же задачу, если пары (u, v) удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Задача 5. («миноры») Пусть V и W – два векторных пространстыва над произвольным полем k, $V \xrightarrow{\varphi} W$ – линейное отображение, и $\Phi_{v,w}$ – его матрица в каких-либо базисах $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ и $\{w_1, w_2, \dots, w_m\} \subset W$ (по столбцам Φ стоят координаты векторов v_ν в базисе w.

а) Верно ли, что если $\dim V = \dim W$, то φ будет изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\det \Phi_{v,w} \neq 0$?

б) Пусть размерности V и W произвольны, а матрица $\Phi_{v,w}$ имеет ненулевой минор k-того порядка. Постройте в V k-мерное подпространство, которое изоморфно вкладывается в W отображением φ.

в) Пусть все миноры m-того порядка у матрицы системы из $n > m$ однородных линейных уравнений от m неизвестных (над полем) обращаются в нуль. Является ли это условие необходимым и достаточным для существования нетривиального решения у такой системы?

Задача 6. («результант») Пусть $A = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ и $B = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m$ (предполагается, что a_0 и b_0 отличны от нуля) есть пара многочленов над полем k. Пусть уравнение $XA + YB = 0$ имеет решение, отличное от $B, -A$ (т.е. $\text{НОД}(A, B)$ есть многочлен степени $k > 0$)

а) Запишите это условие как условие на миноры матрицы

$$\underbrace{\begin{pmatrix}
a_0 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n & & & \\
 & a_0 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n & & \\
 & & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & a_0 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n \\
b_0 & \dots & b_{m-1} & b_m & & & & \\
 & b_0 & \dots & b_{m-1} & b_m & & & \\
 & & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\
 & & & \ddots & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & b_0 & \dots & b_{m-1} & b_m
\end{pmatrix}}_{m+n}
\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \end{matrix}$$

б) Найдите ранг этой матрицы, рассмотрев отображение векторных пространств над k:

$$k[x] \times k[x] \longmapsto k[x] \; : \quad (A, B) \mapsto AX + BY$$

в) Решите задачу 3 из письменного экзамена.

Задача 7. («модуль гомоморфизмов») Сколько всего имеется различных $\mathbb{Z}$-линейных гомоморфизмов из $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, если

а) n и m взаимно просты,

б) $m = n = p$ – простое число,

в) $n = p^r$, $m = p^s$, где p – простое число?

Зададим теперь на множестве гомоморфизмов структуру $\mathbb{Z}$-модуля относительно операций поточечного сложения значений гомоморфизма и умножения их на числа. Опишите строение этого модуля в каждом из предыдущих случаев.

Задача 8. («полупростые $\mathbb{Z}$-модули»)

а) Существует ли в $\mathbb{Z}$-модуле $M = \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$ такой $\mathbb{Z}$-подмодуль $V \subset M$, который нельзя было бы отщепить прямым слагаемым (т. е. подобрать к нему дополнительный подмодуль $W \subset M$, так чтобы $M = V \oplus W$).

б) Тот же вопрос про $\mathbb{Z}$-модуль $M = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

в) Тот же вопрос про $\mathbb{Z}$-модуль $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

г) Перечислите все конечно порождённые $\mathbb{Z}$-модули, в которых каждый подмодуль отщепляется прямым слагаемым (такие модули называются *полупростыми* или *вполне приводимыми*).

Задача 9. («нормальные подгруппы») Пусть $p > 1$ – наименьшее простое число, делящее порядок конечной группы $\mathfrak{G}$, и пусть $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ – подгруппа индекса p. Докажите, что подгруппа $\mathfrak{H}$ нормальна

а) при $p = 2$;

б) в общем случае.

Задача 10. («перестановки») Рассмотрим симметрическую группу $\mathfrak{S}_6$.

а) Проверьте, что $\mathfrak{S}_6$ порождается циклом длины 6 и транспозицией (неважно какими).

б) Перечислите все классы сопряжённых элементов в $\mathfrak{S}_6$.

в) Подсчитайте число элеменгтов в каждом классе сопряжённости.

г) Укажите элемент шестого порядка и элемент второго порядка, которые отличались бы от цикла длины 6 и транспозиции, и порождали бы группу $\mathfrak{S}_6$.

д)* **(необязательная трудная задача)** Существует ли автоморфизм группы $\mathfrak{S}_6$, не являющийся внутренним?