Программа экзамена по алгебре за первый семестр первого курса

(экзамен состоится 15 декабря в 10 часов)

Тема 1. Элементарная арифметика и комбинаторика: биномиальные коэффициенты, разбиения, тождества «сокращённого умножения», арифметика вычетов, приведение по модулю, Гауссовы целые числа, теорема Вильсона и малая теорема Ферма.

Тема 2. Поля: комплексные числа (геометрические и алгебраические приёмы вычислений в поле $\mathbb{C}$), тригонометрические тождества, алгебраические расширения полей, поля типа $\mathbb{Q}[\vartheta]$, простое подполе, характеристика, гомоморфизмы полей, гомоморфизм Фробениуса, конечные поля.

Тема 3. Многочлены: деление многочленов, алгоритм Евклида, производный многочлен, кратные корни, сепарабельность, присоединение корня, разложение на множители многочленов с целыми коэффициентами (лемма Гаусса и критерии неприводимости), разложение рациональной функции на простейшие дроби$^{\heartsuit}$, факториальность кольца многочленов над факториальным кольцом (достаточно уметь ею пользоваться и знать схему доказательства).

Тема 4. Кольца главных идеалов: евклидовы кольца, $\mathbb{Z}$, $k[x]$, нётеровость и факториальность, китайская теорема об остатках, НОД, НОК, взаимная простота.

Тема 5. Коммутативные кольца: определение, примеры, гомоморфизмы, идеалы, факторизация, строение гомоморфизма, простота и неприводимость, нётеровость, максимальные идеалы, прямые суммы колец.

Тема 6. Алгебра матриц: матричная запись систем линейных уравнений и линейных замен переменных, элементарные преобразования, метод Гаусса: приведение к строгому ступенчатому виду над полем и приведение к строгому диагональному виду над евклидовым кольцом, элементарные матрицы, свойства операций над матрицами, (некоммутативные) кольца и алгебры, обратимые элементы, отыскание обратной матрицы методом Гаусса, решение систем линейных уравнений, ранг матрицы$^{\heartsuit}$, подстановка матриц в многочлены и степенные ряды.

Тема 7. Векторные пространства: аффинное и векторное координатные пространства, (абстрактное) векторное пространство, линейная зависимость, теоремы о базисах, матричный формализм для записи координатных разложений, замен базисов и линейных отображений.

Тема 8. Модули над коммутативными кольцами: определение модуля, образующие, базисы и линейная зависимость, свободные модули, ранг$^{\spadesuit}$, гомомрфизмы, подмодули и фактор-модули, строение гомомрфизма модулей, задание гомомрфизма матрицей, прямые суммы модулей.

Тема 9. Определители: ориентированный объём n-мерного параллелипипеда, полилинейность, знакопеременность и кососимметричность, поведение полилинейной косой формы при линейной замене аргументов, определитель матрицы, его элементарные свойства и методы вычисления, правило Крамера, дискриминант и результант, соотношения Лапласа, присоединённая матриыа, тождество Гамильтона-Кэли.

Тема 10. Модули над кольцами главных идеалов: теорема о взаимном базисе$^{\spadesuit}$, инвариантные множители и элементарные делители$^{\spadesuit}$, теорема о строении конечно-порождённого модуля над областью главных идеалов$^{\spadesuit}$, приложение к абелевым группам$^{\spadesuit}$.

Тема 11. Группы: определение группы, реализация группы автоморфизмами множества, орбиты, стабилизаторы, теорема Лагранжа, нормальные подгруппы, фактор-группа$^\heartsuit$, строение гоморфизма$^\heartsuit$, группа фигуры, симметрические группы малых рангов и правильные многогранники.

Тема 12. Перестановки: чётность, зак, правило ниточек, разложение в независимые циклы, классы сопряжённости, диаграммы Юнга, строение групп $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_5$, $\mathfrak{A}_5$, простота знакопеременных групп$^\heartsuit$.

Тема 13. Многчлены от многих переменных: лексикографическое упорядочение мономов, однозначность разложения на множители, формулы Виета, основная теорема об элементарных симметрических функциях$^\heartsuit$, некоторые стандартные базисы в модуле симметрических многочленов и матрицы перехода между ними$^\spadesuit$.

Тема 14. Формальные степенные ряды: формальные алгебраические операции над формальными рядами, дифференцирование, интегрирование, подстановка ряда в ряд, обращение, логарифмическая производная, бином с произвольным показателем$^\heartsuit$, метод производящих функций$^\heartsuit$, формулы Ньютона для степенных сумм$^\spadesuit$, действие $k[[d/dt]]$ на $k[t]^\spadesuit$, обращение разностных операторов$^\spadesuit$, числа и многочлены Бернулли$^\spadesuit$, суммирование степеней$^\spadesuit$, поле рядов Лорана, поле дробно-степенных рядов$^\spadesuit$, разложение неявной алгебраической функции в ряд Пюизо$^\spadesuit$.

Комментарий. Экзамен будет состоять в письменном решении задач, предложенных экзаменаторами. Для его успешной сдачи *не требуется владения теми пунктами программы, которые помечены знаками* $^\heartsuit$ *и* $^\spadesuit$.

Пункты, помеченные знаком $^\heartsuit$, являются более-менее стандартными элементами алгебраической культуры и знакомство с ними ни для кого не вредно, так что мы настоятельно рекомендуем ознакомится с ними самостоятельно.

Пункты, помеченные знаком $^\spadesuit$, являются более специальными, они либо не затрагивались на лекциях вообще (из-за нехватки времени) или излагались в виде набросков. Желающие могут ознакомится с ними (мы рекомендуем делать это *после* экзаменационной сессии) по записям лекций (они готовятся к печати и доступны в виде dvi-файла).