Элементы комбинаторики.

А0-1. Сколько разных слов (не обязательно осмысленных) можно получить переставляя буквы в словах

а) рок **б)** урок **в)** шнурок **г)** курок **д)** колобок

е) $\underbrace{\texttt{аа}\dots\texttt{а}}_{a}\underbrace{\texttt{бб}\dots\texttt{б}}_{b}$ **ж)** $\underbrace{\texttt{б}_1\texttt{б}_1\dots\texttt{б}_1}_{k_1}\underbrace{\texttt{б}_2\texttt{б}_2\dots\texttt{б}_2}_{k_2}\dots\dots\dots\underbrace{\texttt{б}_m\texttt{б}_m\dots\texttt{б}_m}_{k_m}$.

А0-2. Раскройте скобки и прведите подобные слагаемые в выражениях

а) $(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^2$ **б)** $(a + b + c)^3$ **в)** $(a + b)^n$ **г)** $(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^N$

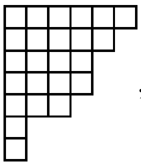
А0-3. Имеются: 4 попарно отличающихся друг от друга чашки, 4 совершенно одинаковых гранёных стакана, 10 совершенно одинаковых кусков сахара и 7 попарно разноцветных соломинок. Скольким способами можно разложить:

(i) соломинки по чашкам **(ii)** сахар по чашкам
(iii) сахар по стаканам **(iv)** соломинки по стаканам
(v) сахар по чашкам так, чтобы не было пустых чашек

А0-4. Сколько решений имеет уравнение $x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$ (где m, n – фиксированные натуральные числа)

а) в натуральных числах, **б)** в целых неотрицательных числах?

А0-5. Сколько существует различных отображений из m-элементного множества в n-элементное?

А0-6. Фигурка типа , состоящаая из выравненных по правому краю клетчатых горизонтальных полосок, длина которых невозрастает сверху вниз, называется *диаграммой Юнга*. Общее число клеток в диаграмме называется её *весом*. Сколько существует диаграмм Юнга

а) веса 6;

б) веса 7, имеющих не более 3 строк;

в) произвольного веса, но имеющих не более p строк и не более q столбцов.

Мультиномиальные коэффициенты. Если $N = n_1 + n_2 + \dots + n_\nu$ (все n_i – целые неотрицательные) то мы полагаем

$$\binom{N}{n_1, n_2, \dots, n_\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_\nu!} .$$

При $\nu = 2$ число $\binom{n}{k,(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ обозначается ерез $\binom{n}{k}$ и называется (n,k)-тым *биномиальным коэффициентом* или *числом сочетаний* из n по k). Отметим, что

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

А0-7. Докажите, что все описанные выше числа (например, число $1000!/100!^{10}$) являются целыми.

А0-8. Докажите реккурентное соотношение $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

А0-9. Вычислите: **а)** $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$

б) $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \cdots + \binom{k+n}{k}$ **в)*** $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$.

А0-10. Пусть p – простое число. Покажите, что $\binom{p}{k}$ либо равно 1 либо делится на p, и выясните

а) когда $\binom{2p}{k} \not\equiv 0 \mod p$?

б)* верно ли, что $\binom{b_0 + b_1 p + \cdots + b_k p^k}{a_0 + a_1 p + \cdots + a_k p^k} \equiv \binom{b_0}{a_0}\binom{b_1}{a_1}\cdots\binom{b_k}{a_k} \mod p$?

А0-11. Обозначим через $\binom{n}{k}_m$ количество всех чисел в m-ичной системе счисления с суммой цифр, равной k. Покажите, что $\binom{n}{k}_2$ совпадает с биномиальным коэффициентом $\binom{n}{k}$, а в общем случае равно коэффициенту при x^k после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых в выражении $(1 + x + x^2 + \cdots + x^{m-1})^n$, и докажите следующие соотношения, обобщающие предыдущие факты о числах сочетаний:

а)* $\binom{n}{k}_m = \binom{n}{n(m-1)-k}_m$

б)* $\binom{n}{k}_m = \underbrace{\binom{n-1}{k}_m + \binom{n-1}{k-1}_m + \cdots + \binom{n-1}{k-m+1}_m}_{m}$

в)* при любом фиксированном s выполнено соотношение

$$\binom{n}{k}_m = \binom{s}{0}_m \binom{n-s}{k}_m + \binom{s}{1}_m \binom{n-s}{k-1}_m + \cdots + \binom{s}{k}_m \binom{n-s}{0}_m$$

г)* $\binom{n}{0}_m^2 + \binom{n}{1}_m^2 + \cdots + \binom{n}{n(m-1)}_m^2 = \binom{2n}{n(m-1)}_m$

А0-12*. Подсчитайте количество счастливых автобусных таллонов[1].

[1]автобусный таллон называется счастливым, если сумма первых трёх цифр написанного на нём шестизначного номера равна сумме последних трёх цифр