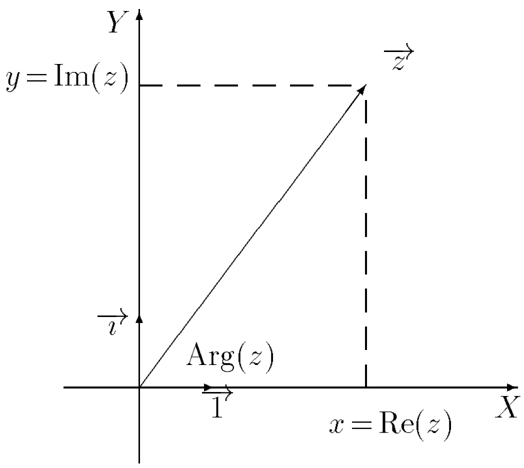
Комплексные числа.

Основные понятия. Поле *комплексных чисел* $\mathbb{C}$ — это плоскость с фиксированной декартовой системой координат XOY (как на рис. 1). Точки $z \in \mathbb{C}$ называются *комплексными числами*. С ними связаны следующие понятия: *вещественная часть* $x = \mathrm{Re}(z)$ – координата точки z по оси $[OX)$; *мнтмая часть* $y = \mathrm{Im}(z)$ – координата точки z по оси $[OY)$; *радиус-вектор* z – вектор Oz с концом в z и началом в начале координат; *модуль* $|z|$ – длина радиус-вектора z; *аргумент* $\mathrm{Arg}(z)$ – ориентированная длина дуги, которую надо пройти по единичной окружности от луча $[OX)$ до луча $[OZ)$ (знак "+" соответствует движению против ЧС).



1. Атрибуты комплексного числа.

Подчеркнём, что $\mathrm{Arg}(z)$ является *многозначной* функцией от z, поскольку определён с точностью до любого целого числа оборотов.

Определение операций: *сложение* комплексных чисел— это сложение их радиус-векторов по праилу параллелограмма; *умножение* комплексных чисел — это перемножение их модулей с одновременным сложением аргументов[1].

Алгебраическая запись комплексных чисел. Числа с координатами $(1,0)$ и $(0,1)$ обозначаются 1 и i соответственно. Таким образом, каждое комплексное число можно алгебраически записывать в виде $z = x + iy = x \cdot 1 + y \cdot i$, где $x = \mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\mathrm{Arg}(z))$, $y = \mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\mathrm{Arg}(z))$.

A1-1°. Чему равны i^2, i^3, i^4, $\ldots$, i^n ?

A1-2°. Проверьте выполнение аксиом поля для $\mathbb{C}$ (особенно обратите внимание корректность определения умножения и на дистрибутивность) и выразите действительную и мнимую части произведения и суммы двух комплексных чисел через действительную и мнимую части самих этих чисел.

A1-3°. Выразите вещественную и мнимую часть, модуль и аргумент числа $(x+iy)^n$, где $x = \cos\varphi, y = \sin\varphi$, **а)** через z и y; **б)** через φ.

A1-4. Вычислите (т. е. найдите вещественную и мнимые чати, модуль и аргумент):

а) $\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$; **б)** $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$;

в) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$; **г)** $(1+\cos\alpha + i\sin\alpha)^k$.

A1-5. Решите уравнения:

а) $z^2 + (2i-7)z + (13-i) = 0$; **б)** $z^3 = i$; **в)** $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$;
г) $(z+i)^n + (z-i)^n = 0$; **д)** $\overline{z} = z^3$.

[1] таким образом, преобразование плоскости, состоящее в умножении всех точек на фиксированное комплексное число z есть *поворотная гомотетия* с углом $\mathrm{Arg}(z)$ и коэффициентом $|z|$

A1-6. Выразите $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ и $\sin\dfrac{4\pi}{5}$ в радикалах.

A1-7. Всегда ли вещественная и мнимая части корня квадратного уравнения с комплексными коэффициентами выражаются в радикалах через вещественные и мнимые части коэффициентов уравнения?

A1-8. Вычислите

а) сумму и произведение всех корней степени n из 1,

б) сумму и произведение s-тых степеней всех корней степени n из 1.

A1-9. Вычислите суммы:

а)	$\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\cdots$;	**б)**	$\binom{n}{1}+\binom{n}{5}+\binom{n}{9}+\cdots$;
в)	$\binom{n}{1}-\frac{1}{3}\binom{n}{5}+\frac{1}{9}\binom{n}{9}+\cdots$;	**г)**	$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$;
д)	$\sin^2 x+\sin^2 3x+\cdots+\sin^2(2n-1)x$;	**е)**	$\cos x+2\cos 2x+\cdots+n\cos nx.$.

A1-10. Пусть $m\in\mathbb{N}$ — нечётно. Убедитесь, что $\dfrac{\sin mx}{\sin x}$ является многочленом от $\sin^2 x$, найдите его степень, корни и старший коэффициент и докажите тождества:

а) $\dfrac{\sin(mx)}{\sin\ x}=(-4)^{\frac{m-1}{2}}\prod\limits_{j=0}^{\frac{m-1}{2}}\left(\sin^2 x-\sin^2\left(2\pi j/m\right)\right)$;

б) $(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin(mx)=2^{m-1}\prod\limits_{j=0}^{m-1}\sin\left(x+2\pi j/m\right)$.

A1-11. Докажите, что

а) три попарно разные точки $z_1,\ z_2,\ z_3\in\mathbb{C}$ тогда и только тогда лежат на одной прямой, когда $\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ вещественно;

б) четыре попарно разные точки $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4\in\mathbb{C}$, не лежащие на одной прямой, тогда и только тогда лежат на одной окружности, когда их *двойное отношение* $\dfrac{(z_1-z_3):(z_2-z_3)}{(z_1-z_4):(z_2-z_4)}$ вещественно.

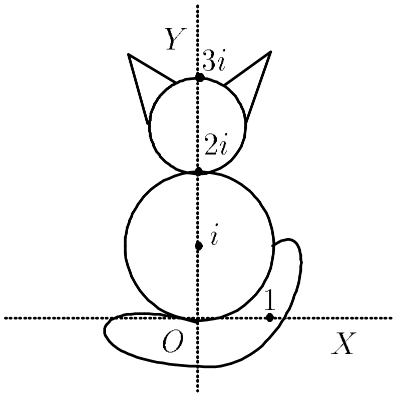
A1-12. Куда отображения $z\longmapsto z^2$ и $z\longmapsto 1/z$ переводят:

а) прямую $y=kx$;

б) окружность $|z+i|=1$

в) координатную сетку

г) кошечку с рис. 2



2. Комплексная кошечка

A1-13. Докажите, что отображение $z\longmapsto(az+b)/(cz+d)$ (где $a,b,c,d\in\mathbb{C}$) переводит окружности и прямые или в окружности или в прямые, сохраняя при этом углы.

A1-14. Докажите, что если $z+1/z=2\cos\theta$, то $z^m+1/z^m=2\cos m\theta$.

A1-15. Доказать, что всякое комплексное число z, $|z|=1$, $z\neq-1$, может быть представлено в виде $z=\dfrac{1+ti}{1-ti}$ с $t\in\mathbb{R}$.