Письменная контрольная работа по темам «поля», «кольца», «делимость».

A5-1. Вычислите *НОД* (A, B) и представьте его в виде $Ax + By$ с $x, y \in K$ для

а) $A = 10013$, $B = 6213$ в $K = \mathbb{Z}$;

б) $A = 57 + 2i$, $B = 91 + 444i$ в $K = \Gamma$.

A5-2. Сколько решений имеет уравнение $x^7 = 35$ в $\mathbb{Z}/601\mathbb{Z}$?

A5-3. Решите сравнение $6x^3 + 27x^2 + 17x + 20 \equiv 0(\mod 30)$.

A5-4. Выясните:

а) будет ли кольцо $\mathbb{Q}[\vartheta]$, где $\vartheta^5 = 1$, (т. е факторкольцо $\mathbb{Q}[x]/(x^5 - 1)$) полем?

б) будет ли $1 + \vartheta^2 + \vartheta^4$ обратим в нём (если да, то найдите обратный к нему элемент, если нет, объясните почему)?

A5-5. Найдите все неприводимые многочлены степени 2 и выясните сколько имеется неприводимых многочленов степени 3 над полями $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

A5-6. В кольце $\mathbb{Z}[x]$ разложите на неприводимые множители или докажите неприводимость многочленов:

а) $t^4 + t + 1$,

б) $t^5 + t^4 + t^2 + t + 2$,

в) $t^6 + t^3 + 1$.