Матричная алгебра

А6-1. Найти все матрицы, коммутирующие с матрицей $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

А6-2. Найти все квадратные матрицы размера $n \times n$, коммутирующие с любой матрицей того же размера.

А6-3. Вычислите: **а)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, **б)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n$, **в)** $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, **г)** $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n$.

А6-4. Вычислите значения многочленов $f(x) = 2x^2 - 3x + x^0$ и $g(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_nx^0$ на матрицах **а)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, **б)** $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, **в)*** $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, **г)*** $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

А6-5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — целые положительные числа, $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2\pi}{a_k} + i\sin\dfrac{2\pi}{a_k}$. В какой наименьшей степени матрица $\begin{pmatrix} 0 & & \varepsilon_1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \varepsilon_n & & 0 \end{pmatrix}$ будет равна E?

А6-6. Напишите уравние, корнем которого является матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

А6-7. Пусть матрица $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ является решением уравнения $x^2 = 2$. Будет ли $K[A]$ полем при: **а)** $K = \mathbb{Z}$, **б)** $K = \mathbb{Q}$, **в)** $K = \mathbb{R}$.

А6-8*. Для какого класса матриц A из $M_2(\mathbb{R})$ кольцо $\mathbb{R}[A]$ изоморфно полю комплексных чисел?

А6-9. Докажите, что квадратные матрицы вида

а) верхне– треугольные матрицы $= \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$, **б)** диагональные матрицы $= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

образуют кольца, а матрицы вида

в) $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & a_{ij} & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ с $a_{ij} \in \mathbb{C}$ и нулями в остальных местах ,

г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$, **д)** верхнетреугольные унипотентные матрицы $= \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

образуют группы по умножению.

А6-10. Докажите, что множество матриц $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & -d & c \\ c & d & -a & -b \\ d & -c & b & -a \end{pmatrix} \right\}$ образует группу по умножению и сложению.

А6-11. Пусть A, B, $\ldots$, C_1, D_1 - квадратные матрицы одного порядка.

а) Выразите произведение матриц $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$ в терминах исходных восьми матриц.

б) Обобщите полученную формулу на неквадратные матрицы.

А6-12*. Напишите явную формулу для (ij)-того элемента матрицы, обратной к верхнетреугольной унипотентной матрице (h_{ij}) (где $h_{ii} = 1$ и $h_{ji} = 0$ при $j > i$).

А6-13*. Пусть A, B, C, D - невырожденные матрицы. Докажите, что

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & (C - DB^{-1}A)^{-1} \\ (B - AC^{-1}D)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Терминология. Пусть A и B - квадратные матрицы; матрица $[A, B] \stackrel{\text{def}}{=} AB - BA$ называтся их *коммутатором*. Число $\operatorname{Tr} A \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_i a_{ii}$ называется *следом* квадратной матрицы A. Матрица $A \neq 0$ называется *нильпотентной*, если $A^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Матрица A называется *унипотентной*, если $A = E + N$, где N — нильпотентная матрица.

А6-14. Докажите, что $\operatorname{Tr}[A, B] = 0$ для любых квадратных матриц A, B.

А6-15. Докажите, что для любых квадратных матриц A, B, C выполняются *правила Лейбница*: **а)** $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$, **б)** $[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]]$.

А6-16. Выразите $(A + B)^n$ через $A^i B^j$, если **а)** $[A, B] = 0$, **б)*** $[A, B] = B$, **в)*** $[A, B] = A$.

А6-17. Верно ли, что сумма двух нильпотентных матриц A и B нильпотентна?

а) Докажите, что это так, если матрицы перестановочны.

б) Докажите, что это так, если A перестановочна с $[A, B]$.

А6-18. Докажите, что если A – нильпотентна, то то матрица $E \pm A$ обратима.

А6-19. Пусть $a \in \mathbb{C}$; вычислите: **а)** $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$, **б)** $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{-1}$, **в)** $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{-1}$.

А6-20. Пусть A - нильпотентная матрица, G - множество матриц вида $f(A)$, где f - формальный степенной ряд от одной переменной без свободного члена. Докажите, что G - группа относительно операции $f(A) * g(A) \stackrel{\text{def}}{=} f(A) + g(A) - f(A)g(A)$.

А6-21*. Докажите, что матрица A над полем конечной характеристики унипотентна тогда и только тогда, когда $A^n = E$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

А6-22*. Докажите, что пара матриц

$$\textbf{а)}\quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad J_n^* = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{б)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

порождают алгебру матриц $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ над полем $\mathbb{C}$, т.е. любая матрица из $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ может быть получена из J_n и J_n^* конечным числом операций умножения, сложения и умножения на число.