Определители

A8-1. Найдите знак перестановки $(n, (n-1), \dots, 2, 1)$.

A8-2. Числа $1, 2, 3, \dots, n^2$ всевозможными способами организуются в квадратные матрицы размера $n \times n$. Найдите сумму определителей всех этих матриц.

A8-3. Вычислите:

$$\textbf{а)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{pmatrix}^{-1}, \quad \textbf{б)}\ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{-1}, \quad \textbf{в)}\ \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1}, \quad \textbf{г)}\ \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

A8-4. При каких условиях матрица $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ с $a, b, c \in \mathbb{Z}$ обратима над $\mathbb{Z}$?

A8-5. Пусть A есть $n \times n$ матрица. Выразите коэффициенты характеристического многочлена $\chi_A(t) = \det(tE - A) = 0$ через миноры матрицы A.

A8-6. Обозначим через A_{ij} с $1 \leqslant i < j \leqslant 4$ 2×2-минор матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

образованный i-тым и j-тым столбцами. Найдите квадратичное тождество, связывающее шесть величин A_{ij} (оно называется *соотношением Плюккера*).

A8-7*. Докажите, что шесть чисел тогда и только тогда реализуются как шесть 2×2-миноров некоей 2×4-матрицы, когда они удовлетворяют квадратичному соотношению Плюккера из предыдущей задачи.

A8-8. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

Напишите условие существования такого λ, при котором пространство решений системы

$$(A + \lambda B)x = 0$$

становится 2-мерным.

A8-9. Рядом Фибоначчи назавыется последовательность, которая начинается числами 1, 1 и в которой каждое следующее число равно сумме двух предыдущих. Докажите, что $(n+1)$-й член ряда Фибоначчи равен определителю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & \dots & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$