Кое-что о группах.

A9-1°. Докажите, что

а) отображение множества M в множество N является инъективным тогда и только тогда, когда оно имеет левое обратное отображение;

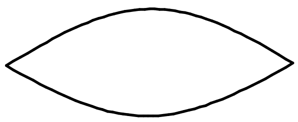
б) отображение множества M в множество N является сюръективным тогда и только тогда, когда оно имеет правое обратное отображение.

A9-2°. Пусть $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ — цикл длины k, а $\tau \in \mathfrak{S}_n$ — произвольная перестановка. Убедитесь, что $\tau\sigma\tau^{-1}$ есть цикл длины k и выясните, какие элементы входят в этот цикл, если $\sigma = (1, 2, \dots, k)$?

A9-3. Пусть $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ — нечётная перестановка и N — её порядок в группе $\mathfrak{S}_n$. Что можно сказать про чётность N?

A9-4. Рассмотрим перестановку $\sigma = (\,3\,,\;5\,,\;4\,,\;1\,,\;2\,) \in \mathfrak{S}_5$. Найдите σ^{100}.

Группа фигуры. Множество всех движений пространства, переводящих данную фигуру $\mathfrak{F}$ в себя называется *собственной* (или *несобственной*) *группой* фигуры $\mathfrak{F}$, смотря по тому, допускаются ли при этом несобственные (т. е. меняющие ориентацию) движения. Группа правильного плоского n-угольника в пространстве называется *группой диэдра* и обозначается $\mathfrak{D}_n$. Специальный частный случай – группа «двуугольника» $\mathfrak{D}_2$ называется *квадратичной группой Клейна* и обозначается $\mathfrak{V}_4$ (двуугольник можно представлять себе либо как отрезок с «квадратным поперечным сечением[1]», либо как «дольку» с рис.1).



1. правильный двуугольник

A9-5°. Пусть $\mathfrak{G}$ — несобственная группа ромба, не являющегося квадратом. Найдите порядок группы $\mathfrak{G}$ и опишите орбиты и стационарные подгруппы вершин ромба.

A9-6. Докажите, что симметрическая группа $\mathfrak{S}_3$ изоморфна (несобственной) группе треугольника $\mathfrak{D}_3$.

A9-7. Найдите порядок группы $\mathfrak{D}_n$ и все точки плоскости, для которых порядок стабилизатора в группе $\mathfrak{D}_n$ больше 1.

A9-8. Найдите порядок стационарной подгруппы вершины и порядок всей группы для собственных и несобственных групп:

а) тетраэдра; **б)** куба; **в)** октаэдра; **г)** икосаэдра; **д)** додекаэдра.

A9-9. Докажите, что несобственная группа тетраэдра изоморфна группе $\mathfrak{S}_4$.

A9-10. Сколько элементов симметрической группы $\mathfrak{S}_4$ остаются неподвижными при сопряжении перестановкой $(1, 2)(3, 4)$?

A9-11. Постройте геометрический изоморфизмы собственной группы

а) тетраэдра с A_4; **б)** куба и октаэдра с $\mathfrak{S}_4$; **в)** икосаэдра и додекаэдра с A_5.

A9-12. Изоморфна ли несобственная группа икосаэдра группе $\mathfrak{S}_5$?

A9-13. Используя предыдущие геометрические образы юостройте эпиморфизм $\mathfrak{S}_4 \to \mathfrak{S}_3$ и опишите его ядро (подсказка: ядро есть стабилизатор естественно ассоциированного с кубом пространственного двуугольника).

[1] т. е. имеюжим низ, верх, право и лево

A9-14. Доказажите, что в конечной абелевой группе порядка n для любого $d \mid n$ существует хотя бы одна подгруппа порядка d.

A9-15. Доказажите, что конечная мультипликативная подгруппа в поле всегда является циклической.

Добрый совет. Когда речь идёт о взаимодествии некоей нормальной подгруппы в $\mathfrak{G}$ с какой-либо другой подгруппой или фактор-группой группы $\mathfrak{G}$, полезно ьывает рассмотреть естественное действие этой другой подгруппы сопряжениями на нормальной подгруппе.

A9-16. Пусть $\mathfrak{G}$– группа из шести элементов. Докажите, что:

а) в $\mathfrak{G}$ имеется подгруппа, изоморфная $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;

б) эта подгруппа нормальна;

в) в $\mathfrak{G}$ имеется подгруппа, изоморфная $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;

г) если она нормльна, то $\mathfrak{G} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, а если нет, то $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{S}_3 \cong \mathfrak{D}_3$.

A9-17. Пусть $\mathfrak{G}$ – группа из 15-ти элементов. Докажите, что:

а) в $\mathfrak{G}$ имеется подгруппа, изоморфная $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$;

б) в $\mathfrak{G}$ имеется подгруппа, изоморфная $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;

в) обе эти подгруппы нормальны;

г) $\mathfrak{G} \cong \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

A9-18. Всегда ли инъективный гомоморфизм групп имеет левый обратный гомоморфизм и всегда ли сюръективный гомоморфизм групп имеет правый обратный гомоморфизм?

A9-19. Пусть произведение любых двух левых смежных классов группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе $\mathfrak{H}$ снова является левым смежным классом. Докажите, что $\mathfrak{H}$ нормальна.

A9-20. Пусть $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — две нормальные подгруппы группы $\mathfrak{G}$, и $\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_2 = \{e\}$. Докажите, что $ab = ba$ для любых $a \in \mathfrak{H}_1$, $b \in \mathfrak{H}_2$.

A9-21. Пусть $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ – подгруппа, индекс которой совпадает с наименьшим простым делителем p порядка группы. Докажите, что $\mathfrak{H}$ – нормальная подгруппа (рассмотрите случай $p = 2$, если общий случай вызывает у Вас затруднения).

A9-22. Найдите *центр* $Z\,\mathfrak{G}$, группу *внутренних автоморфизмов* $\mathrm{I}nt\,\mathfrak{G}$ и группу всех автоморфизмов $\mathrm{A}ut\,\mathfrak{G}$ для следующих групп $\mathfrak{G}$:

а) группы μ_n комплексных корней степени n из единицы для $n = 2, 3, 4, 5, 6$;

б) группы диэдра $\mathfrak{D}_n$ при $n = 3, 4$; **в)*** симметрической группы $\mathfrak{S}_4$;

г)* знакопеременной группы A_4; **д)*** знакопеременной группы $\mathbb{A}_5$.

A9-23. Докажите, что симметрическая группа $\mathfrak{S}_n$ порождена транспозицией (12) и циклом

$$(\,1\,2\,3\,\ldots\,n\,)\,.$$

A9-24. Докажите, что знакопеременная группа $\mathbb{A}_n$ порождается 3-циклами

$$\{\,(123)\,,\ (124)\,,\ \ldots\,,\ (12n)\,\}\,.$$

A9-25. Постройте эпиморфизм из свободной группы порождённой двумя элементами на группу диэдра $\mathfrak{D}_n$ и опишите его ядро (если трудно для любого n рассмотрите $n = 3,\ 4$).

A9-26. Докажите, что группа треугольника порождается двумя отражениями, и опишите соотношения между ними.

A9-27*. Тот же вопрос про симетрическую группу $\mathfrak{S}_4$ и три отражения (на самом деле, подобное описание имеется для всех групп $\mathfrak{S}_n$).

A9-28. Пусть $\mathfrak{G}$ — произвольная группа, $a, b \in \mathfrak{G}$, причём порядок их произведения ab равен n. Каким может быть порядок элемента ba?

A9-29. Группа $\mathfrak{G}$ задана образующими a, b и соотношениями $ab^2 = ba$, $ba^2 = ab$. Каков порядок группы $\mathfrak{G}$?