Оглавление

1. Плоские алгебраические кривые

Плоской алгебраической кривой называют кривую на плоскости $\mathbf{R}^2$, заданную уравнением $\sum\limits_{i+j\le n} a_{ij}x^iy^j = 0$, где i, j — неотрицательные целые числа, причем $a_{ij} \ne 0$ хотя бы для одной пары чисел i, j, сумма которых равна n. Число n называют при этом **степенью** кривой.

Многие неприятности, возникающие при изучении различных свойств кривых на плоскости $\mathbf{R}^2$, исчезают при переходе к комплексной проективной плоскости $\mathbf{C}P^2$. Напомним, что **комплексной проективной плоскостью** называют множество лучей в $\mathbf{C}^3$, проходящих через начало координат. Иными словами, точками $\mathbf{C}P^2$ служат ненулевые наборы чисел (x, y, z), где $x, y, z \in \mathbf{C}$, причем наборы (x, y, z) и $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$, $\quad \lambda \in \mathbf{C}$, считаются эквивалентными. Кривые в $\mathbf{C}P^2$ устроены более единообразно, чем кривые на плоскости $\mathbf{R}^2$, потому что в $\mathbf{C}P^2$ бесконечно удаленные точки и мнимые точки ничем существенным не отличаются от обычных точек.

Кривой $\sum\limits_{i+j\le n} a_{ij}x^iy^j = 0$ можно сопоставить кривую $\sum\limits_{i+j\le n} a_{ij}x^iy^jz^{n-i-j} = 0$ в $\mathbf{C}P^2$. Условия $z = 1, \quad x, y \in \mathbf{R}$ выделяют в $\mathbf{C}P^2$ множество, совпадающее с $\mathbf{R}^2$. Ограничение кривой в $\mathbf{C}P^2$ на это множество представляет собой плоскую алгебраическую кривую с теми же самыми коэффициентами a_{ij}.

Плоскую алгебраическую кривую $F(x, y) = 0$ называют **неприводимой**, если многочлен F нельзя представить в виде произведения многочленов F_1 и F_2 положительной степени. В противном случае кривую называют **приводимой**. Как множество точек приводимая кривая представляет собой объединение кривых $F_1 = 0$ и $F_2 = 0$.

Простейшая приводимая кривая степени n задается уравнением $l_1 \cdot \cdot \cdot l_n = 0$, где $l_1, \dots, l_n$ — линейные функции. Как множество точек эта кривая представляет собой объединение прямых $l_1 = 0, \dots, l_n = 0$.

Простейшая приводимая кривая $l_1 \cdots l_n = 0$ во многих ситуациях помогает выяснить, как обстоят дела в случае произвольной кривой степени n. Например, кривые $l_1 \cdots l_m = 0$ и $l'_1 \cdots l'_n = 0$ имеют mn общих точек. Ниже мы покажем, что любые кривые степени m и n имеют либо mn общих точек (с учетом кратности), либо бесконечно многих общих точек.

Одним из важнейших понятий для алгебраической кривой является понятие касательной. Дадим определение касательной для кривой в $\mathbf{C}P^2$. Пусть точка A принадлежит кривой $F = 0$, то есть $F(A) = 0$. Возьмем произвольную точку $P = (p_1, p_2, p_3)$ и рассмотрим прямую PA.

Точки этой прямой имеют координаты $A + tP$. Поэтому точки пересечения прямой PA и кривой $F(X) = 0$ соответствуют корням уравнения

$$F(A+tP) = F(A) + t\sum \frac{\partial F}{\partial x_i}(A)p_i + \ldots = 0. \tag{1}$$

Так как $F(A) = 0$, то уравнение (1) имеет корень $t = 0$. В том случае, когда корень $t = 0$ двукратный, то есть $\sum \frac{\partial F}{\partial x_i}(A)p_i = 0$, прямую PA называют **касательной** к кривой $F = 0$ в точке A.

В том случае, когда $F(A) = 0$ и вектор

$$\operatorname{grad} F(A) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(A), \frac{\partial F}{\partial y}(A), \frac{\partial F}{\partial z}(A)\right)$$

ненулевой, точку A называют **неособой** точкой кривой $F = 0$. Если же вектор $\operatorname{grad} F(A)$ нулевой, то точку A называют **особой** точкой кривой $F = 0$. Любая прямая, проходящая через особую точку, является касательной к данной кривой.

Задача 1.1. Доказать, что в декартовых координатах (x, y) касательная к кривой $F(x, y) = 0$ в точке (x_0, y_0) задается уравнением

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Задача 1.2. Доказать, что если $F(x, y, z)$ — однородный многочлен степени n, то

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = nF.$$

Задача 1.3. Пусть $A = (x_0, y_0, z_0)$ — точка кривой $F = 0$ в $\mathbf{C}P^2$. Доказать, что уравнения

$$x\frac{\partial F}{\partial x}(A) + y\frac{\partial F}{\partial y}(A) + z\frac{\partial F}{\partial z}(A) = 0$$

и

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(A) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(A) + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(A) = 0$$

эквивалентны.

Если A — особая точка кривой $F = 0$, то

$$F(A + tP) = a_0(P) + a_1(P)t + a_2(P)t^2 + \ldots,$$

где $a_0(P) = a_1(P) = 0$. В том случае, когда $a_0(P) = \ldots = a_{k-1}(P) = 0$ для всех точек P и $a_k(P) \neq 0$ для некоторой точки P, число k называют

кратностью особой точки A. Например, для кривой $l_1 \cdots l_k = 0$, где $l_1, \ldots, l_k$ — линейные функции, обращающиеся в нуль в точке A, кратность точки A равна k.

Задача 1.4. **а)** Найти кратность точки $(0,0)$ кривой $y^2 = x^2(x-1)$.

б) Найти кратность точки $(0,0)$ кривой $y^2 = x^3$.

Задача 1.5. Пусть A — особая точка кратности k кривой $F = 0$. Доказать, что ограничение полинома F на любую прямую, проходящую через точку A, имеет в точке A корень кратности не меньше k, причем кратность корня больше k лишь для конечного числа прямых.

Кривая, все точки которой неособые, называется **неособой**. Кривая в $\mathbf{C}P^2$, соответствующая неособой кривой на плоскости $\mathbf{R}^2$, может быть особой, потому что у нее могут появиться особые точки.

Задача 1.6. Найти особые точки следующих кривых в $\mathbf{C}P^2$: а) $y^2 z = x^3$; б) $y^2 z^{n-2} = \prod\limits_{i=1}^{n}(x - a_i z), \quad n \geq 4$.

Займемся теперь поиском точек пересечения кривых. Для удобства рассмотрим кривые небольших степеней, а именно, кривую $f(x,y) = 0$ третьей степени и кривую $g(x,y) = 0$ второй степени. Многочлены f и g можно записать в виде

$$f(x,y) = a_0 y^3 + a_1(x) y^2 + a_2(x) y + a_3(x),$$
$$g(x,y) = b_0 y^2 + b_1(x) y + b_2(x),$$

где степени многочленов $a_k(x)$ и $b_k(x)$ не превосходят k. Точка (x_0, y_0) является точкой пересечения кривых $f = 0$ и $g = 0$ тогда и только тогда, когда многочлены $f(x_0, y)$ и $g(x_0, y)$ имеют общий корень y_0.

Пусть $f(y)$ и $g(y)$ — многочлены степени m и n. Эти многочлены имеют общий корень над полем $\mathbf{C}$ тогда и только тогда, когда существуют многочлены f_1 и g_1, степени которых меньше m и n соответственно и $fg_1 = gf_1$. В самом деле, если f и g имеют общий корень над $\mathbf{C}$, то они имеют над $\mathbf{C}$ общий делитель d. Тогда $f_1 = fd^{-1}$ и $g_1 = gd^{-1}$. А если $fg_1 = gf_1$, то в многочлен $h = fg_1 = gf_1$ входят все множители, на которые разлагаются многочлены f и g, но степень h меньше суммы степеней f и g. Поэтому многочлены f и g имеют общий делитель, а значит, они имеют общий корень над полем $\mathbf{C}$.

Итак, кривые $f(x,y) = 0$ и $g(x,y) = 0$, степени которых равны m и n соответственно, имеют общую точку (x_0, y_0) тогда и только тогда, когда для многочленов $f(x_0, y)$ и $g(x_0, y)$ можно подобрать такие многочлены $f_1(y)$ и $g_1(y)$, что $fg_1 = f_1 g$, причем $\deg g_1 < n$ и $\deg f_1 < m$. Но при этом мы предполагаем, что степени многочленов $f(x_0, y)$ и $g(x_0, y)$ совпадают со степенями кривых, то есть мы требуем, чтобы выполнялись условия $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$. Ниже мы убедимся, что выполнения этих условий всегда можно добиться, сделав замену координат.

В случае, когда $m = 3$ и $n = 2$, многочлены f_1 и g_1 имеют вид $f_1(y) = u_0y^2 + u_1y + u_2, \quad g_1(y) = v_0y + v_1$. Коэффициенты u_0, u_1, u_2, v_0, v_1 нужно подобрать так, чтобы выполнялось равенство:

$$(a_0y^3 + a_1y^2 + a_2y + a_3)(v_0y + v_1) = (b_0y^2 + b_1y + b_2)(u_0y^2 + u_1y + u_2),$$

то есть

$$\begin{array}{llllll}
a_0v_0 & & = b_0u_0 & & \\
a_1v_0 & +a_0v_1 & = b_1u_0 & +b_0u_1 & \\
a_2v_0 & +a_1v_1 & = b_2u_0 & +b_1u_1 & +b_0u_2 \\
a_3v_0 & +a_2v_1 & = & +b_2u_1 & +b_1u_2 \\
 & a_3v_1 & & & b_2u_2
\end{array}$$

В результате получаем систему линейных уравнений относительно

$$v_0, v_1, u_0, u_1, u_2.$$

Эта система имеет ненулевой решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы

$$\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\
b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\
0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2
\end{pmatrix} \tag{2}$$

равен нулю.

Для кривых на плоскости $\mathbf{R}^2$ коэффициенты a_i и b_i представляют собой многочлены от x, степени которых не превосходят i. Для кривых в $\mathbf{C}P^2$ ситуация более определенная, а именно, степени однородных многочленов $a_i(x, z)$ и $b_i(x, z)$ в точности равны i (если только эти многочлены не нулевые). Ясно также, что для кривой в $\mathbf{C}P^2$

$$f(0, 1, 0) = a_0 \quad \text{и} \quad g(0, 1, 0) = b_0.$$

Это означает, что условие $a_0b_0 \neq 0$ выполняется, если ни одна из кривых $f = 0$ и $g = 0$ в $\mathbf{C}P^2$ не проходит через бесконечно удаленную точку (0,1,0).

Для кривых $f = 0$ и $g = 0$ произвольной степени можно построить матрицу, аналогичную матрице (2). Определитель этой матрицы называют **результантом** многочленов f и g. Для кривых на плоскости $\mathbf{R}^2$

результант представляет собой многочлен от x, а для кривых в $\mathbf{C}P^2$ результант представляет собой многочлен от x и z. Корни результанта соответствуют точкам пересечения кривых.

Теорема 1.1 (Безу). Для кривых степени m и n в $\mathbf{C}P^2$ результант представляет собой однородный многочлен степени mn (или тождественно равен нулю).

Доказательство. Ограничимся снова случаем $m = 3$ и $n = 2$. Пусть $R(x, z)$ — определитель матрицы

$$S = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Требуется доказать, что $R(\lambda x, \lambda z) = \lambda^6 R(x, z)$.

По условию $a_k(\lambda x, \lambda z) = \lambda^k a_k(x, z)$ и $b_k(\lambda x, \lambda z) = \lambda^k b_k(x, z)$. Поэтому $R(\lambda x, \lambda z) = \det\ S_\lambda$, где

$$S_\lambda = \begin{pmatrix} a_0 & \lambda a_1 & \lambda^2 a_2 & \lambda^3 a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & \lambda a_1 & \lambda^2 a_2 & \lambda^3 a_3 \\ b_0 & \lambda b_1 & \lambda^2 b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & \lambda b_1 & \lambda^2 b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & \lambda b_1 & \lambda^2 b_2 \end{pmatrix}.$$

Домножим первую и вторую строки матрицы S_λ на 1 и λ, а третью, четвертую и пятую строки — на 1, λ и λ^2. В результате получим матрицу S, столбцы которой домножены на 1, λ, λ^2, λ^3 и λ^4. Поэтому $\det S_\lambda = \lambda^{p-q-r} \det S$, где $p = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $q = 1$ и $r = 1 + 2 = 3$. В общем случае $p = 1 + 2 + \ldots + (m + n - 1)$, $q = 1 + 2 + \ldots + (m - 1)$ и $r = 1 + 2 + \ldots + (n - 1)$. Поэтому

$$p - q - r = \frac{(m + n)(m + n - 1)}{2} - \frac{m(m - 1)}{2} - \frac{n(n - 1)}{2} = mn. \ \square$$

Задача 1.7. Пусть A — точка кратности r кривой $f = 0$ и кратности s кривой $g = 0$. Доказать, что точке A соответствует корень результанта многочленов f и g, имеющий кратность rs.

Теорема Безу имеет многочисленные приложения. Но прежде, чем мы ими займемся, полезно обсудить следующий вопрос: сколько точек нужно задать, чтобы через них проходила единственная кривая степени n? Для этого нам потребуется так называемое отображение Веронезе

$f_n : \mathbf{C}P^2 \to \mathbf{C}P^d$, сопоставляющее точке $(x, y, z) \in \mathbf{C}P^2$ точку с координатами $u_{ijk} = x^i y^j z^k$, где $i + j + k = n$. При этом число d на 1 меньше количества различных представлений числа n в виде упорядоченной суммы трех неотрицательных чисел.

Задача 1.8. Доказать, что $d = \binom{n+2}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$.

Задача 1.9. а) Доказать, что, если числа x, y, z не все равны нулю, то одно из чисел $x^i y^j z^k$ не равно нулю.

б) Доказать, что отображение Веронезе разные точки $\mathbf{C}P^2$ переводит в разные точки $\mathbf{C}P^d$.

Кривая $\sum a_{ijk} x^i y^j z^k = 0$ при отображении Веронезе переходит в сечение образа $\mathbf{C}P^2$ в $\mathbf{C}P^d$ гиперплоскостью $\sum a_{ijk} u_{ijk} = 0$. Ясно также, что образ $\mathbf{C}P^2$ в $\mathbf{C}P^d$ не может лежать в одной гиперплоскости $\sum a_{ijk} u_{ijk} = 0$, поскольку иначе все точки $\mathbf{C}P^2$ должны были бы лежать на кривой $\sum a_{ijk} x^i y^j z^k = 0$.

Через любые d точек в $\mathbf{C}P^d$ можно провести гиперплоскость. Это означает, в частности, что через любые d точек в $\mathbf{C}P^2$ можно провести кривую степени n. А так как образ $\mathbf{C}P^2$ не лежит в одной гиперплоскости, то в $\mathbf{C}P^2$ можно выбрать $d + 1$ точку так, чтобы их образы не лежали в одной гиперплоскости. Это означает, что в $\mathbf{C}P^2$ можно выбрать $d + 1$ точку так, что через них нельзя провести кривую степени n.

Требуемую $d + 1$ точку можно выбрать, например, следующим образом. Точку A_1 выбираем произвольно. После того, как выбраны точки $A_1, \ldots, A_k$, проводим через них кривую степени n и выбираем точку A_{k+1} вне этой кривой. Иными словами, мы проводим гиперплоскость через образы точек $A_1, \ldots, A_k$ в $\mathbf{C}P^d$ и выбираем точку в образе $\mathbf{C}P^2$, но вне полученной гиперплоскости. Эта конструкция позволяет выбрать в $\mathbf{C}P^d$ точки, не лежащие в одной гиперплоскости. Им соответствуют точки в $\mathbf{C}P^2$, не лежащие на одной кривой степени n.

Образы выбранных точек $A_1, \ldots, A_{d+1}$ при отображении Веронезе служат вершинами d-мерного симплекса. Любые d из этих точек соответствуют грани симплекса. Это, в частности, означает, что через точки $A_1, \ldots, A_d$ проходит единственная кривая степени n.

Подведем итоги. Через любые $d = \frac{n(n+3)}{2}$ точек в $\mathbf{C}P^2$ можно провести кривую степени n. В $\mathbf{C}P^2$ можно указать d точек, через которые проходит единственная кривая степени n. Более того, если через данные d точек проходит не одна кривая степени n, то малым шевелением данных точек можно добиться того, чтобы через полученные точки проходила единственная кривая степени n (то есть малым шевелением d точек, лежащих в одной $(d-2)$-мерной плоскости, можно перевести в d точек, не лежащих в одной $(d-2)$-мерной плоскости).

Задача 1.10. На плоскости прямые p_1, p_2 и p_3 пересекают прямые q_1, q_2 и q_3 в 9 различных точках. Доказать, что образы этих точек при отображении Веронезе $f_3: \mathbf{C}P^2 \to \mathbf{C}P^9$ лежат в одной 7-мерной плоскости.

2. Рациональная параметризация кривой

Неприводимая кривая третьей степени не может иметь более одной особой точки кратности 2. В самом деле, если A и B — точки кратности 2, то прямая AB пересекает кривую по крайней мере четырехкратно. Для кубической кривой это означает, что прямая AB целиком принадлежит кривой, то есть кривая приводима.

Для кривой степени n тоже можно оценить сверху число особых точек.

Теорема 2.1. Неприводимая кривая степени n не может иметь более $N = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ двойных точек.

Доказательство. Случай $n = 3$ мы уже рассмотрели. Разберем теперь случай $n = 4$. В этом случае $N = 3$. Предположим, что A_1, A_2, A_3 и A_4 — двойные точки кривой 4-й степени. Чтобы прийти к противоречию, возьмем на этой кривой произвольную точку P, отличную от точек A_i. Через точки P, A_1, A_2, A_3 и A_4 можно провести кривую степени 2. Она пересекает кривую степени 4 в точке P по крайней мере однократно, а в точках A_i по крайней мере двукратно. Всего точек пересечения получается не меньше $1 + 2 \cdot 4$, а по теореме Безу их должно быть ровно $2 \cdot 4$. Получено противоречие.

Для кривой степени n предположим, что $A_1, \ldots, A_{N+1}$ — двукратные точки этой кривой. Выберем на данной кривой произвольные точки $P_1, \ldots, P_{n-3}$. Тогда общее количество точек A_i и P_j будет равно

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 + (n-3) = \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

Поэтому через эти точки можно провести кривую степени $n-2$. Она пересекает кривую степени n по крайней мере в

$$(n-1)(n-2) + 2 + (n-3) = n(n-2) + 1$$

точках, что противоречит теореме Безу. $\square$

Мы не будем доказывать, что для любого n существует неприводимая кривая степени n, имеющая ровно $N = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ двойных точек. Но сейчас мы докажем, что кривая степени n с N двойными точками допускает рациональную параметризацию. Это означает, что существуют такие рациональные функции $x(t)$ и $y(t)$, что при всех t, кроме конечного числа значений, точка $(x(t), y(t), 1) \in \mathbf{C}P^2$ лежит на данной кривой, причем точки вида $(x(t), y(t), 1)$ пробегают всю кривую, за исключением лишь конечного числа точек. При этом разным значениям параметра t соответствуют разные точки кривой. С топологической точки зрения кривая в $\mathbf{C}P^2$, допускающая рациональную параметризацию, устроена так, что после выкалывания нескольких точек она превращается в сферу, из которой выколото несколько точек.

Теорема 2.2. Неприводимая кривая степени n, имеющая $N = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ двойных точек, допускает рациональную параметризацию.

Доказательство. Рассмотрим сначала кубическую кривую, имеющую двойную точку $O = (0, 0, 1)$. Прямая, проходящая через точку O, задается уравнением $y = tx$. Эта прямая имеет с кубической кривой двукратной пересечение в точке O, поэтому она пересекает кубическую кривую еще ровно в одной точке $(x(t), y(t), 1)$. Функции $x(t)$ и $y(t)$ — однозначные алгебраические, поэтому они рациональные. В самом деле, пусть

$$x^n(t) + na_1(t)x^{n-1}(t) + \ldots + a_n(t) = 0, \tag{3}$$

причем $x(t)$ — однозначная функция, то есть все n корней совпадают. Тогда уравнение (3) имеет вид $(x(t) + a_1(t))^n = 0$. Следовательно, $x(t) = -a_1(t)$ — рациональная функция t.

Через любую точку кривой, отличную от точки O, проходит ровно одна прямая $y = tx$. Таким образом, любой точке кривой, кроме точки O, соответствует ровно одно значение параметра t. Точке O соответствуют две касательные $y = t_1x$ и $y = t_2x$ к двум ветвям кривой в точке O. Поэтому исключительной точкой кубической кривой является двойная точка, а исключительными значениями параметра t являются t_1 и t_2.

При $n > 3$ на кривой степени n с двойными точками $A_1, \ldots, A_N$ нужно дополнительно фиксировать произвольные точки $P_1 \ldots, P_{n-3}$. Через точки $A_1, \ldots, A_N, P_1, \ldots, P_{n-3}$ проходит однопараметрическое семейство кривых степени $n - 2$. Каждая из этих кривых имеет с данной кривой $n(n-2) - 1$ общую точку, поэтому у них есть еще ровно одна общая точка $(x(t), y(t), 1)$. Ясно также, что через любую точку кривой и точки $A_1, \ldots, A_N, P_1, \ldots, P_{n-3}$ можно провести кривую степени $n - 2$. □

Доказательство теоремы 2.2 позволяет явным образом построить рациональную параметризацию. Рассмотрим в качестве примера лемнискату $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Она имеет три особые точки (0,0,1) и

$(1, \pm i, 0)$. Выберем в качестве дополнительной точки P_1 точку (0,0,1), то есть рассмотрим семейство кривых второй степени, проходящих через точки $(1, \pm i, 0)$ и касающиеся одной из двух ветвей лемнискаты в точке (0,0,1). Такие кривые (для одной из ветвей) имеют вид

$$x^2 + y^2 = t(x - y).$$

Подставив это выражение в уравнение лемнискаты, получим $a^2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2 = t^2(x - y)^2$, поэтому

$$y = \frac{t^2 - a^2}{t^2 + a^2}x, \qquad x = \frac{ta^2(t^2 + a^2)}{t^4 + a^4}.$$

Задача 2.1. Доказать, что кривая $(x^2 - y)^2 = y^3$ допускает рациональную параметризацию.

Задача 2.2. **а)** Доказать, что кривая $P_n(x, y) + P_{n-1}(x, y) = 0$, где P_n и P_{n-1} — однородные многочлены степени n и $n - 1$ соответственно, допускает рациональную параметризацию.

б) Доказать, что кривая степени n, имеющая точку кратности $n - 1$, допускает рациональную параметризацию.

Задача 2.3. Доказать, что точки $(x(t), y(t))$, где $x(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$, $\quad y(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n$, лежат на кривой, степень которой не превосходит n.

Отметим без доказательства, что для кривой, допускающей рациональную параметризацию $(x(t), y(t))$, параметр t можно выразить в виде рациональной функции от x и y. Это свойство позволяет использовать рациональную параметризацию кривой $F(x, y) = 0$ для вычисления интегралов вида $\int R(x, y)dx$, где R — рациональная функция. В самом деле, пусть кривая $F(x, y) = 0$ допускает рациональную параметризацию. Тогда точки этой кривой можно представить в виде $(x(t), y(t))$, где x и y — рациональные функции. Поэтому $R(x(t), y(t)) = R_1(t)$ и $dx(t) = r(t)dt$, где R_1 и r — рациональные функции. Следовательно, $\int R(x, y)dx = \int Q(t)dt$, где Q — рациональная функция. Хорошо известно, что $\int Q(t)dt$ выражается через элементарные функции от t. Воспользовавшись тем, что $t = t(x, y)$ — рациональная функция от x и y, можно получить выражение интеграла $\int R(x, y)dx$ через элементарные функции от x и y.

Задача 2.4. **а)** Параметризовать кривую $y^2 = ax^2 + bx + c$ с помощью семейства прямых $y = t(x - \alpha)$, где α — один из корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

б) Применить полученную параметризацию для вычисления интегралов вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx.$$

3. Приложения теоремы Безу

Напомним, что через любые $d = \frac{n(n+3)}{2}$ точек на плоскости проходит кривая степени n. Для почти всех наборов из d точек такая кривая единственна. В том случае, когда через данные d точек проходит единственная кривая степени n, будем говорить, что эти точки находятся в общем положении. Подмножества системы точек общего положения тоже будем называть точками общего положения (для кривой той же степени n).

С помощью теоремы Безу можно доказать некоторые свойства систем точек алгебраических кривых. Речь в этих теоремах идет, как правило, о точках общего положения.

Теорема 3.1. Пусть две кривые степени n пересекаются в n^2 точках, причем np из этих точек лежат на неприводимой кривой степени p. Тогда оставшиеся $n(n-p)$ точек лежат на кривой степени $n-p$.

Доказательство. Пусть $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$ — уравнения данных кривых степени n, $g = 0$ — уравнение кривой степени p, на которой лежат данные np точек. Для любой точки плоскости числа λ_1 и λ_2 можно подобрать так, чтобы кривая $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$ проходила через эту точку. Поэтому можно считать, что кривая $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$ проходит через некоторую точку кривой $g = 0$, отличную от данных np точек. Тогда кривые $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$ и $g = 0$ имеют $np + 1$ общих точек, а значит, они имеют общую компоненту. В силу неприводимости кривой $g = 0$ этой общей компонентой может быть лишь кривая $g = 0$. Поэтому $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = gh$, где h — некоторый полином степени $n-p$. Кривая $gh = 0$ проходит через все n^2 точек, а кривая $g = 0$ проходит лишь через данные np точек. Следовательно, кривая $h = 0$ проходит через все оставшиеся $n(n-p)$ точек. $\square$

Следствие. Пусть $2n$-угольник вписан в кривую степени 2. Тогда все точки, в которых стороны с четными номерами пересекают несмежные с ними стороны с нечетными номерами, лежат на одной кривой степени $n-2$.

Доказательство. Стороны с четными номерами образуют одну вырожденную кривую степени n, а стороны с нечетными номерами образуют другую кривую. Вершины $2n$-угольника образуют систему из $2n$ точек пересечения рассматриваемых кривых. Эти точки лежат на кривой степени 2, поэтому остальные $n(n-2)$ точки лежат на кривой степени $n-2$.

Теорема 3.2. Однопараметрическое семейство кривых степени n, проходящих через данные $d-1=\frac{n(n+3)}{2}-1$ точек общего положения, имеет еще $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ общих точек.

Доказательство. Пусть $f=0$ и $g=0$ — уравнения двух кривых из рассматриваемого семейства кривых. Тогда уравнения всех остальных кривых этого семейства имеют вид $\lambda f+\mu g=0$. Поэтому все они проходят через n^2 общих точек кривых $f=0$ и $g=0$. Среди этих точек данные точки составляют лишь некоторую часть; количество остальных точек равно

$$n^2-\frac{n(n+3)}{2}+1=\frac{(n-1)(n-2)}{2}. \ \square$$

Для точек пересечения кривых разных степеней теорема, аналогичная теореме 2, выглядит следующим образом.

Теорема 3.3. Семейство кривых степени n, проходящих через данные $np-\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ точек кривой степени p, где $p<n$, имеет еще $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ общих точек, причем все они лежат на рассматриваемой кривой степени p.

Доказательство. Пусть на кривой $f_p=0$ степени p дано α точек. Если $\alpha\le n(n+3)/2$, то существует кривая $g_n=0$ степени n, проходящая через данные точки. Кривая $g_n=0$ пересекает кривую $f_p=0$ в $np=\alpha+\beta$ точках. Требуется доказать, что если $\alpha=np-\frac{(p-1)(p-2)}{2}$, то указанные β точек не зависят от выбора кривой $g_n=0$.

Рассмотрим кривую $g_n'=0$ степени n, проходящую через данные α точек. Кривые $g_n=0$ и $g_n'=0$ пересекаются в n^2 точках. Среди этих точек содержатся данные α точек; выберем среди этих n^2 точек еще $\alpha'=\frac{n(n+3)}{2}-1-\alpha$ точек. Тогда через данные $\alpha+\alpha'=\frac{n(n+3)}{2}-1$ точек проходит однопараметрическое семейство кривых степени n. В том случае, когда

$$\alpha'\le\frac{(n-p)(n-p+3)}{2},$$

через выбранные α' точек можно провести кривую $h_{n-p}=0$ степени $n-p$. Поэтому семейство кривых степени n, проходящих через выбранные $\alpha+\alpha'$ точек, порождено кривыми $g_n=0$ и $f_ph_{n-p}=0$. В частности, $g_n'=\lambda g_n+\mu f_ph_{n-p}$. Поэтому кривая $g_n'=0$ пересекает кривую $f_p=0$ в тех же $np=\alpha+\beta$ точках, что и кривая $g_n=0$.

Остается заметить, что условие $\alpha'\le\frac{(n-p)(n-p+3)}{2}$ эквивалентно тому, что $\alpha=\frac{n(n+3)}{2}-1-\alpha'\ge np-\frac{(p-1)(p-2)}{2}$. $\square$

Теорему 3.3 можно обобщить, а именно, вместо семейств кривых степени n, проходящих через точки пересечения кривых степени n и p, можно рассмотреть семейство кривых степени k. Соответствующее утверждение выглядит следующим образом.

Теорема 3.4 (Кэли). Пусть $n, p < k < n+p-3$. Тогда любая кривая степени k, проходящая через

$$np - \frac{(n+p-k-1)(n+p-k-2)}{2}$$

точек пересечения кривых степени n и p, проходит и через остальные точки пересечения.

Доказательство. Пусть среди np точек пересечения кривой $f_p = 0$ степени p и кривой $g_n = 0$ степени n задано α точек. Рассмотрим произвольную кривую $g'_k = 0$ степени k, проходящую через эти α точек. Среди точек пересечения кривых $f_p = 0$ и $g'_k = 0$ выберем дополнительно $\alpha' = \frac{(k-n)(k-n+3)}{2}$ точек, а среди точек пересечения кривых $g_n = 0$ и $g'_k = 0$ выберем дополнительно $\alpha'' = \frac{(k-p)(k-p+3)}{2}$ точек. Это можно сделать, так как по условию $k-p+3 \geq p$ и $k-p+3 \leq n$, а значит, $\alpha' < kp$ и $\alpha'' < kn$. Через α' точек можно провести кривую $h'_{k-p} = 0$ степени $k-p$, а через α'' точек можно провести кривую $h''_{n-p} = 0$ степени $n-p$.

В нашем случае $\alpha = np - \frac{(n+p-k-1)(n+p-k-2)}{2}$, поэтому $\alpha + \alpha' + \alpha'' = \frac{k(k+3)}{2} - 1$. Это означает, что через выбранные точки проходит однопараметрическое семейство кривых степени k. Кривые $g'_k = 0, f_p h'_{k-p} = 0$ и $g_n h''_{k-n} = 0$ входят в это семейство. Следовательно, $g'_k = \lambda f_p h'_{k-p} + \mu g_n h''_{k-n}$, а значит, кривая $g'_k = 0$ проходит через все точки пересечения кривых $f_p = 0$ и $g_n = 0$. $\square$

Остается заметить, что условие $\alpha' \leq \frac{(n-p)(n-p+3)}{2}$ эквивалентно тому, что $\alpha = \frac{n(n+3)}{2} - 1 - \alpha' \geq np - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$. $\square$

Теорему 3.3 можно обобщить, а именно, вместо семейств кривых степени n, проходящих через точки пересечения кривых степени n и p, можно рассмотреть семейство кривых k. Соответствующее утверждение выглядит следующим образом.

Теорема 3.4 (Кэли). Пусть $n, p < k < n+p-3$. Тогда любая кривая степени k, проходящая через

$$np - \frac{(n+p-k-1)(n+p-k-2)}{2}$$

точек пересечения кривых степени n и p, проходит и через остальные точки пересечения.

Доказательство. Пусть среди np точек пересечения кривой $f_p = 0$ степени p и кривой $g_n = 0$ степени n задано α точек. Рассмотрим произвольную кривую $g'_k = 0$ степени k, проходящую через эти α точек. Среди точек пересечения кривых $f_p = 0$ и $g'_k = 0$ выберем дополнительно $\alpha' = \frac{(k-n)(k-n+3)}{2}$ точек, а среди точек пересечения кривых $g_n = 0$ и $g'_k = 0$ выберем дополнительно $\alpha'' = \frac{(k-p)(k-p+3)}{2}$ точек. Это можно сделать, так как по условию $k-p+3 \geq p$ и $k-p+3 \leq n$, а значит, $\alpha' < kp$ и $\alpha'' < kn$. Через α' точек можно провести кривую $h'_{k-p} = 0$ степени $k-p$, а через α'' точек можно провести кривую $h''_{n-p} = 0$ степени $n-p$.

В нашем случае $\alpha = np - \frac{(n+p-k-1)(n+p-k-2)}{2}$, поэтому $\alpha + \alpha' + \alpha'' = \frac{k(k+3)}{2} - 1$. Это означает, что через выбранные точки проходит однопараметрическое семейство кривых степени k. Кривые $g'_k = 0, f_p h'_{k-p} = 0$ и $g_n h''_{k-n} = 0$ входят в это семейство. Следовательно, $g'_k = \lambda f_p h'_{k-p} + \mu g_n h''_{k-n}$а значит, кривая $g'_k = 0$ проходит через все точки пересечения кривых $f_p = 0$ и $g_n = 0$. $\square$

4. Римановы поверхности и разветвленные накрытия

Алгебраическая кривая C в $\mathbf{C}P^2$ представляет собой ориентируемую двумерную поверхность, причем если кривая неособая, то поверхность будет гладкой и у нее не будет края. Ориентируемость следует из того, что после выкалывания нескольких точек кривая C превращается в комплексное многообразие. Но ориентируемость можно также доказать и более непосредственным образом, что мы и сделаем чуть позже.

Неособая алгебраическая кривая в $\mathbf{C}P^2$ представляет собой компактное одномерное комплексно-аналитическое многообразие, то есть является римановой поверхностью. С топологической точки зрения кривая в $\mathbf{C}P^2$ представляет собой сферу с g ручками (рис. 1); число g называют **родом** кривой.

Для особой кривой тоже можно определить род. Дело в том, что после выкалывания нескольких точек из сферы с g ручками не теряется информация о числе ручек, то есть при $g \neq h$ сфера с g ручками и несколькими выколотыми точками не может быть гомеоморфна сфере с h ручками и несколькими выколотыми точками. А любая неприводимая алгебраическая кривая после выкалывания нескольких точек превращается в сферу с g ручками, из которой выколото несколько точек. Что же касается приводимой кривой, то она превращается в несколько сфер с ручками, из которых выколоты точки.

Для вычисления рода кривой и для исследования некоторых других свойств кривой бывает полезно рассмотреть проекцию $\mathbf{C}P^2$ на $\mathbf{C}P^1$ и

Рис. 1.

индуцированное этой проекцией отображение кривой $C \subset \mathbf{C}P^2$ на $\mathbf{C}P^1$. Под проекцией мы подразумеваем обычную проекцию плоскости на прямую. Примером такой проекции может служить отображение $(x, y, z) \mapsto (x, y)$; это отображение не определено для точки $(0, 0, 1) \in \mathbf{C}P^2$. При проекции $\mathbf{C}P^2$ (с выколотой точкой) на $\mathbf{C}P^1$ прообразом точки служит прямая. Как правило, прямая в $\mathbf{C}P^2$ пересекает кривую C степени n ровно в n точках. Поэтому у всех точек $\mathbf{C}P^1$, кроме конечного числа, прообраз при проекции кривой $C \subset \mathbf{C}P^2$ на $\mathbf{C}P^1$ состоит ровно из n точек. Если мы не будем рассматривать проекции вдоль прямых, являющихся компонентами кривой C, или будем рассматривать только неприводимые кривые, то прообраз любой точки $\mathbf{C}P^1$ будет содержать не более n точек. Те точки $\mathbf{C}P^1$, прообразы которых содержат менее n точек, называют **точками ветвления** отображения $p : C \to \mathbf{C}P^1$, а само это отображение называют **разветвленным накрытием**.

Напомним некоторые сведения из топологии двумерных поверхностей. Разбиение двумерной поверхности на криволинейные треугольники называют **триангуляцией**, если стороны любых двух треугольников либо не имеют общих внутренних точек, либо совпадают. Пусть для некоторой триангуляции сферы с g ручками Δ_0, Δ_1 и Δ_2 — число вершин треугольников, число ребер (то есть сторон треугольников) и число самих треугольников. Тогда число $\Delta_0 - \Delta_1 + \Delta_2$ называют **эйлеровой характеристикой**; оно не зависит от триангуляции. Эйлерова характеристика сферы с g ручками равна $2 - 2g$. Эйлерову характеристику поверхности M^2 будем обозначать $\chi(M^2)$.

Отображение $p : M^2 \to N^2$ двумерных поверхностей называют ***n*-листным накрытием**, если любая точка поверхности N^2 имеет такую окрестность U, что ее прообраз $p^{-1}(U)$ гомеоморфен несвязному объединению n окрестностей U, причем отображение p устроено на множестве $p^{-1}(U)$ как естественная проекция на U. Ясно, что рассмотренное выше разветвленное накрытие $p : C \to \mathbf{C}P^1$ после выкалывания точек ветвления и их прообразов превращается в накрытие.

Комплексная проективная прямая $\mathbf{C}P^1$ получается в результате добавления к одномерному комплексному пространству $\mathbf{C}$ бесконечно удаленной точки. Поэтому двумерная поверхность $\mathbf{C}P^1$ гомеоморфна S^2.

Для каждой точки двумерной поверхности можно определить два различных направления вращения вокруг этой точки. Если во всех точках двумерной поверхности задано направление вращения, причем в близких точках направления вращения согласованы, то говорят, что на поверхности **задана ориентация**. Поверхность, на которой можно задать ориентацию, называют **ориентируемой**. Нетрудно убедиться в том, что плоскость $\mathbf{R^2}$ ориентируема и что выкалывание нескольких точек не влияет на ориентируемость. Следовательно, сфера S^2 ориентируема. Ясно также, что если $p : M^2 \to N^2$ — накрытие и поверхность N^2 ориентируема, то поверхность M^2 тоже ориентируема. В самом деле, ориентацию можно поднять с помощью отображения p с N^2 на M^2 (но не всегда можно опустить с M^2 на N^2). Поэтому любая алгебраическая кривая C в $\mathbf{C}P^2$ представляет собой ориентируемую поверхность, так как существует разветвленное накрытие $p : C \to \mathbf{C}P^1 \approx S^2$.

Задача 4.1. Привести пример накрытия $p : M^2 \to N^2$, где поверхность M^2 ориентируема, а поверхность N^2 неориентируема.

Теорема 4.1. Пусть $p : M^2 \to N^2$ — n-листное накрытие, причем M^2 и N^2 — компактные двумерные поверхности. Тогда $\chi(M^2) = n\chi(N^2)$.

Доказательство. Рассмотрим достаточно мелкую триангуляцию поверхности N^2. Тогда прообраз каждого треугольника этой триангуляции состоит из n попарно непересекающихся треугольников, причем прообразы этих треугольников образуют триангуляцию поверхности M^2. В полученной триангуляции поверхности M^2 каждому треугольнику триангуляции поверхности N^2 соответствует ровно n треугольников, каждому ребру — ровно n ребер, а каждой вершине — ровно n вершин. Следовательно, $\chi(M^2) = n\chi(N^2)$. $\square$

Задача 4.2. Доказать, что сфера с g ручками накрывает сферу с h ручками тогда и только тогда, когда $g - 1$ делится на $h - 1$ (здесь $g, h \geq 1$).

Для разветвленных накрытий можно доказать утверждение, аналогичное теореме 4.1.

Теорема 4.2 (Риман–Гурвиц). Пусть $p : M^2 \to N^2$ — n-листное разветвленное накрытие с k точками ветвления, причем точки ветвления имеют $n_1, \ldots, n_k$ прообразов. Тогда

$$\chi(M^2) = n\left(\chi(N^2) - k\right) + n_1 + \ldots + n_k.$$

Доказательство. Разобьем поверхность N^2 на два множества: $N^2 = N_A^2 \cup N_B^2$, где N_A^2 — объединение замыканий окрестностей точек ветвления, N_B^2 — замыкание дополнения N_A^2. Тогда

$$\chi(N^2) = \chi(N_A^2) + \chi(N_B^2) - \chi(N_A^2 \cap N_B^2).$$

Но множество $N_A^2 \cap N_B^2$ состоит из нескольких окружностей, поэтому $\chi(N_A^2 \cap N_B^2) = 0$. Следовательно,

$$\chi(N^2) = A_N + B_N, \text{ где } A_N = \chi(N_A^2), B_N = \chi(N_B^2).$$

Аналогично разобьем поверхность M^2 на множества $M_A^2 = p^{-1}(N_A^2)$ и $M_B^2 = p^{-1}(N_B^2)$. В результате получим

$$\chi(M^2) = A_M + B_M, \text{ где } A_M = \chi(M_A^2), B_M = \chi(M_B^2).$$

Ограничение отображения p на множество M_B^2 является накрытием, поэтому $B_M = nB_N$, а значит,

$$\chi(M^2) - A_M = n\left(\chi(N^2) - A_N\right).$$

Множество M_A^2 состоит из $n_1 + \ldots + n_k$ непересекающихся кругов, а множество N_A^2 состоит из k непересекающихся кругов. Ясно также, что эйлерова характеристика круга равна 1. Поэтому $A_M = n_1 + \ldots + n_k$ и $A_N = n$. $\square$

Пример 4.1. Кривая $x^n + y^n + z^n = 0$ имеет род $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Доказательство. Заметим сначала, что рассматриваемая кривая C неособая. Кроме того, проекция $p : \mathbf{C}P^2 - (0,0,1) \to \mathbf{C}P$ индуцирует отображение $p' : C \to \mathbf{C}P^1$, так как $(0,0,1) \notin C$. Прообраз точки $(x_0, y_0) \in \mathbf{C}P^1$ состоит из точек $(x_0, y_0, z) \in \mathbf{C}P$, где $z^n = -(x_0^n + y_0^n)$. Если $x_0^n + y_0^n \neq 0$, то прообраз состоит ровно из n точек, а если $x_0^n + y_0^n = 0$, то прообраз состоит из одной точки. Поэтому p' — n-листное разветвленное накрытие с точками ветвления $(1, \varepsilon_n)$, где ε_n — корень n-й степени из единицы. Согласно теореме Римана–Гурвица получаем

$$\chi(C) = n\left(\chi(S^2) - n\right) + n = n(2-n) + n = -n^2 + 3n.$$

Поэтому

$$g = \frac{2 - \chi(C)}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.\square$$

Пример 4.2. При $n \geq 3$ род кривой $y^2 = P_n(x)$, где P_n — многочлен степени n без кратных корней, равен $\left[\frac{n-1}{2}\right]$.

Доказательство. Пусть $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Тогда рассматриваемая кривая C в $\mathbf{C}P^2$ задается уравнением $y^2 z^{n-2} = \sum a_i z^{n-i} x^i$. При $n > 3$ кривая C имеет особую точку (0,1,0).

Рассмотрим отображение $p : \mathbf{C}P^2 - (0,1,0) \to \mathbf{C}P^1$, переводящее точку (x,y,z) в точку (x,z). Пусть $p' : C - (0,1,0) \to \mathbf{C}P^1$ — ограничение отображения p. Нетрудно убедиться, что при $x = 1$ прообраз точки (x,z) стремится к точке (0,1,0) при $z \to 0$. В самом деле, $y^2 \approx a_n z^{2-n} \to \infty$, поэтому

$$(1,y,z) = \left(\frac{1}{y}, 1, \frac{z}{y}\right) \to (0,1,0).$$

Таким образом, отображение p' можно продолжить до отображения всей кривой C, положив $p'((0,1,0)) = (1,0)$.

Чтобы найти прообраз точки $(x_0, y_0) \in \mathbf{C}P^1$, нужно решить уравнение $y^2 = z_0^2 P_n\left(\frac{x_0}{z_0}\right)$. Если $\frac{x_0}{z_0}$ — не корень многочлена P_n, то это уравнение имеет ровно два корня. Поэтому точками ветвления являются корни многочлена P_n и, возможно, точка (1,0). Проверим, что точка (1,0) будет точкой ветвления тогда и только тогда, когда n нечетно. При малых z прообраз точки $(1,z)$ состоит из точек вида $(1,y,z)$, где $y^2 \approx a_n z^{2-n}$. Пусть $z = \rho e^{i\varphi}$. При изменении φ от 0 до 2π (то есть при обходе вокруг точки $(1,0) \in \mathbf{C}P^1$) аргумент точки y изменяется на $(2-n)\pi$. Поэтому при n нечетном y изменяет знак, то есть мы переходим на другую ветвь, а при n четном y не изменяется, то есть мы возвращаемся на исходную ветвь.

Таким образом, количество точек ветвления равно $2\left[\frac{n+1}{2}\right]$. Поэтому согласно теореме Римана–Гурвица

$$2 - 2g = 2\left(2 - 2\left[\frac{n+1}{2}\right]\right) + 2\left[\frac{n+1}{2}\right],$$

то есть $g = \left[\frac{n+1}{2}\right] - 1 = \left[\frac{n-1}{2}\right]$. □

Пример 4.3. Род неособой кривой степени n равен $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Первое доказательство. Пусть $F(x,y,z) = 0$ — уравнение неособой кривой $C \subset \mathbf{C}P^2$ степени n. Можно считать, что точка (0,0,1) не лежит на кривой C. Тогда можно рассмотреть проекцию $p : C \to \mathbf{C}P^1$, переводящую точку (x,y,z) в точку (x,y). Прообраз точки (x_0,y_0) состоит из точек (x_0,y_0,z), где z — корень многочлена $P(z) = F(x_0,y_0,z)$. Точкам ветвления соответствуют кратные корни этого многочлена, то есть точки пересечения кривых $F = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$. Степени этих кривых равны n и $n-1$ соответственно.

Рассмотрим сначала случай, когда точки пересечения этих кривых некратные, то есть количество точек пересечения равно $n(n-1)$. В таком случае прообраз каждой точки ветвления состоит ровно из $n-1$ точки, поэтому

$$\chi = n(2 - n(n-1)) + n(n-1)^2 = 2n - n(n-1) = 3n - n^2,$$

а значит,

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Предположим теперь, что есть и кратные точки пересечения. Напомним, что

$$\chi = n(2-k) + n_1 + \ldots + n_k = 2n - \sum_{i=1}^{k}(n - n_i).$$

Для некратных точек пересечения $n - n_i = 1$. А когда d некратных точек пересечения сливаются в одну точку кратности d, вместо d слагаемых $n - n_i = 1$ появляется одно слагаемое, равное d. Сама сумма при этом не изменяется. □

Второе доказательство. Сопоставив кривой степени n коэффициенты задающего его уравнения (с точностью до пропорциональности), множество всех кривых степени n можно отождествить с $\mathbf{C}P^d$, где $d = \frac{n(n+3)}{2}$.

Кривая $F = 0$ будет особой, если система уравнений $F = 0, F_x = 0, F_y = 0, F_z = 0$ имеет ненулевое решение. В этой системе уравнение $F = 0$ лишнее, так как $nF = xF_x + yF_y + zF_z$. Из трех уравнений $F_x = 0, F_y = 0, F_z = 0$ можно исключить x, y и z. В результате получим алгебраическое уравнение относительно коэффициентов a_{ij}. Таким образом, особые кривые принадлежат множеству комплексной коразмерности 1, то есть вещественной коразмерности 2. Это множество не разбивает $\mathbf{C}P^d$, и, значит, неособые кривые образуют связное множество. При малом шевелении неособой кривой ее род не может измениться, поэтому у всех неособых кривых степени n род один и тот же.

Теперь можно было бы воспользоваться примером 4.1, в котором вычислен род одной из неособой кривых степени n. Но можно вычислить и род некоторой другой неособой кривой степени n, например, кривой

Рис. 2.

$l_1 \cdot \ldots \cdot l_n = \varepsilon$, где $l_1, \ldots, l_n$ — прямые общего положения, ε — достаточно малое число. Кривая $l_i = 0$ представляет собой сферу $S^2 \subset \mathbf{C}P^2$. Для кривой $l_1 \cdot \ldots \cdot l_n = \varepsilon$ точка пересечения двух прямых заменяется трубочкой, соединяющей соответствующие этим прямым сферы. Таким образом, рассматриваемая кривая представляет собой n сфер, попарно соединенных трубочками (рис. 2).

Кривая степени n получается из кривой степени $n-1$ добавлением $n-2$ ручек, причем род кривой степени 1 равен 0. Поэтому род кривой степени n равен

$$1 + 2 + \ldots + (n-2) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \quad \square$$

С помощью формулы Римана–Гурвица можно найти количество касательных к данной кривой C, проходящих через данную точку O. Выберем для этого в $\mathbf{C}P^2$ некоторую прямую $\mathbf{C}P^1$, не проходящую через точку O, и рассмотрим проекцию p кривой C на $\mathbf{C}P^1$ из точки O (рис. 3).

Отображение p является разветвленным накрытием. Касательные к кривой C, проходящие через точку O, соответствуют точкам ветвления. Предположим, что C — неособая кривая степени n, а точка O не лежит ни на кривой C, ни на двойных касательных, ни на касательных в точках перегиба. (**Двойной касательной** называют прямую, касающуюся кривой C в двух различных точках.) Тогда для всех точек ветвления $n - n_i = 1$, поэтому

$$\chi = 2n - \sum_{i=1}^{k}(n - n_i) = 2n - k,$$

где k — количество точек ветвления. В нашем случае $\chi = 3n - n^2$, поэтому $k = n^2 - n$. Итак, мы доказали следующее утверждение.

Рис. 3.

Рис. 4.

Теорема 4.3. Из точки общего положения можно провести ровно $n^2 - n$ различных касательных к неособой кривой степени n.

Следствие. Из точки общего положения, лежащей на неособой кривой C степени n, можно провести ровно $n^2 - n - 1$ различных касательных к кривой C.

Доказательство. Когда точка O попадает на кривую C, две касательные, проходящие через точку O, сливаются в одну (рис. 4). $\square$

Для точки O, лежащей на кривой C, одной из $n^2 - n - 1$ касательных будет касательная к кривой в точке O. Если эту касательную исключить, то останется $n^2 - n - 2$ касательных. Особенно интересна ситуация с этими касательными в случае кубических кривых. В этом случае $n^2 - n - 2 = 4$. У кубической кривой нет двойных касательных. Поэтому точками необщего положения будут только точки перегиба. Но в этих точках не происходит ничего плохого — просто одна из четырех касательных совпадает с касательной в этой точке. Таким образом, в каждой точке кубической кривой получаем четверку попарно различных прямых. Для четверки прямых, проходящих через одну точку, можно рассмотреть их **двойное отношение** $[a,b,c,d] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$, где a, b, c и d — координаты точек пересечения данных прямых с некоторой прямой l (от выбора прямой l это число не зависит). Двойное отношение λ зависит от порядка, в котором берутся прямые.

Задача 4.3. **а)** Доказать, что $[a,b,c,d] = [b,a,c,d]^{-1} = [a,b,d,c]^{-1}$.

б) Доказать, что $[a,b,c,d] = 1 - [a,c,b,d]$.

Задача 4.4. **а)** Доказать, что функция

$$J(\lambda) = \frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}$$

не изменяется при заменах λ на λ^{-1} и на $1-\lambda$.

б) Доказать, что если λ — двойное отношение четырех прямых, то $J(\lambda)$ не зависит от порядка, в котором берутся прямые.

Пусть x — точка кубической кривой, $\lambda(x)$ — двойное отношение четырех касательных, проведенных из точки x. Эти касательные всегда попарно различны, поэтому $\lambda(x)$ не принимает значения 0,1 и ∞. Это означает, что $J(\lambda(x))$ — однозначная функция, не принимающая значение ∞, то есть ограниченная функция. Но кубическая кривая C в $\mathbf{C}P^2$ компактна, а ограниченная мероморфная функция на компакте постоянна. Поэтому $J(\lambda(X)) = J(C)$ — инвариант кривой C. По некоторым причинам вместо инварианта J удобнее рассматривать инвариант $j = 2^8 J$.

Задача 4.5. Доказать, что для кривой C, заданной уравнением $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, $\quad J(C) = J(\lambda)$.

5. Овалы вещественных алгебраических кривых

Рассмотрим неприводимую вещественную алгебраическую кривую в $\mathbf{R}P^2$, не имеющую вещественных особых точек. Компоненты связности этой кривой представляют собой связные одномерные многообразия, то есть окружности. Окружности в $\mathbf{R}P^2$ бывают двух типов в соответствии с тем, как устроены их прообразы при накрытии $p : S^2 \to \mathbf{R}P^2$.

Рис. 5.

А именно, прообраз окружности может состоять либо из двух окружностей, либо из одной. В первом случае окружность разбивает $\mathbf{R}P^2$ на две части (лист Мебиуса и круг), а во втором случае окружность не разбивает $\mathbf{R}P^2$ (разрезав по ней $\mathbf{R}P^2$, получим круг). Компоненту алгебраической кривой, разбивающую $\mathbf{R}P^2$ на две части, называют **овалом**.

Теорема 5.1. Все компоненты неприводимой кривой четной степени являются овалами, а у кривой нечетной степени есть ровно одна компонента, не разбивающая $\mathbf{R}P^2$.

Доказательство. Разрезав $\mathbf{R}P^2$ по неразбивающей компоненте, получим круг. А в круге все окружности однотипные - любая замкнутая кривая разбивает круг на две части. Следовательно, у кривой в $\mathbf{R}P^2$ не может быть более одной неразбивающей компоненты.

Таким образом, количество неразбивающих компонент равно 0 или 1. Покажем, что первый случай соответствует кривой четной степени, а второй случай соответствует кривой нечетной степени. Представим для удобства плоскость $\mathbf{R}^2$ в виде круга и раскрасим этот круг в два цвета, меняя цвет при переходе через компоненту алгебраической кривой. В случае кривой с одной неразбивающей компонентой диаметрально противоположные точки будут разноцветными (рис. 5(а)), а в случае кривой без неразбивающих компонент диаметрально противоположные точки будут одноцветными (рис. 5(б)).

Рассмотрим на плоскости $\mathbf{R}^2$ кривую $f(x, y) = 0$ степени n. Области, где $f(x, y) > 0$, окрасим одним цветом, а области, где $f(x, y) < 0$, окрасим другим цветом. На прямой общего положения эти области строго чередуются. Кроме того, четность количества этих областей противоположна четности n, поскольку четность количества вещественных корней многочлена степени n совпадает с четностью n. Это означает,

Рис. 6.

что для кривой степени n диаметрально противоположные точки будут разноцветными при нечетном n и одноцветными при четном n. Следовательно, при нечетном n у кривой степени n есть ровно одна неразбивающая компонента, а при четном n неразбивающих компонент нет. $\square$

Теорема 5.2 (Гарнак). Количество компонент вещественной алгебраической кривой рода g не превосходит $g+1$.

Доказательство. Рассмотрим комплексификацию данной кривой, то есть рассмотрим кривую C в $\mathbf{C}P^2$. Легко проверить, что инволюция $\sigma : (x, y, z) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ корректно определена для точки $\mathbf{C}P^2$ и оставляет неподвижными лишь точки $\mathbf{R}P^2 \subset \mathbf{C}P^2$. Кроме того, так как коэффициенты уравнения кривой C вещественные, инволюция σ переводит кривую C в себя. Следовательно, компоненты $\gamma_1, \ldots, \gamma_h$ вещественной кривой совпадают с множеством точек кривой C, неподвижных при инволюции σ. Покажем, что кривые $\gamma_1, \ldots, \gamma_h$ могут разбивать поверхность C только все вместе, то есть кривые $\gamma_1, \ldots, \gamma_{h-1}$ не разбивают поверхность C. Пусть кривые $\gamma_1, \ldots, \gamma_h$ разбивают поверхность C на части $X_1, \ldots, X_n$. Если $n = 1$, то требуемое утверждение доказано, поэтому в дальнейшем будем считать, что $n > 1$. Точки кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_h$ неподвижны при инволюции σ. Следовательно, множества X_1 и σX_1 склеиваются именно так, как показано на рис. 6(а), а не так, как показано на рис. 6(б).

Поэтому поверхность C состоит из двух связных частей X_1 и σX_1. Перейдя через любую из кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_h$, мы попадем из X_1 в σX_1, поэтому кривые $\gamma_1, \ldots, \gamma_{h-1}$ не разбивают поверхность C.

Итак, кривые $\gamma_1, \ldots, \gamma_{h-1}$ не разбивают поверхность C. Чтобы доказать, что $h \leq g+1$, то есть $h-1 \leq g$, достаточно доказать следующее утверждение.

Лемма. Если замкнутые попарно не пересекающиеся кривые на поверхности рода g не разбивают ее на части, то количество этих кривых не превосходит g.

Доказательство. Разрежем сферу с g ручками по данным k попарно непересекающимся кривым. В результате получим связную поверхность, край которой состоит из $2k$ окружностей. Эта поверхность представляет собой сферу с x ручками, из которой вырезано $2k$ дисков. Вырезание из поверхности диска уменьшает эйлерову характеристику на 1. Поэтому эйлерова характеристика полученной поверхности равна $(2-2x)-2k$. С другой стороны, разрезание поверхности по окружности не изменяет эйлерову характеристику, поэтому эйлерова характеристика полученной поверхности равна эйлеровой характеристике сферы с g ручками, то есть

$$2-2x-2k = 2-2g.$$

Следовательно, $k = g-x \leq g$, так как $x \geq 0$. □□

Из теоремы Гарнака, в частности, следует, что кривая рода 0 состоит из одной компоненты.

Оценка, даваемая теоремой Гарнака, точная. Например, кривая $y^2 = (x-a_1)\dots(x-a_n)$, где $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, имеет род $\left[\frac{n-1}{2}\right]$, а количество компонент этой кривой равно $\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

К оценке количества компонент кривой можно подойти не только с точки зрения рода, но и с точки зрения степени. Максимальный род кривой степени n равен $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Поэтому максимальное количество компонент кривой степени n равно $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$. Кривые с таким числом компонент называют **M-кривыми**. Гарнак указал способ построения M-кривых произвольной степени. Этот способ заключается в следующем.

Требуемая кривая C_n степени n строится индукцией по n. Построение начинаем с коники C_2. Рассмотрим прямую l, пересекающую конику C_2 в двух вещественных точках A_1 и A_2 (рис. 7).

На луче $A_1\infty$ выберем три точки и проведем через них прямые l_1, l_2 и l_3, не пересекающие конику C_2. Кривую C_3 зададим уравнением $lC_2 + tl_1l_2l_3 = 0$. Если число t достаточно мало и имеет нужный знак, то кривая C_3 выглядит как пунктирная кривая на рис. 7.

Для построения кривой C_4 используется кривая C_3. Выберем на отрезке A_1A_2 четыре точки и проведем через них прямые $l_1, \dots, l_4$, каждая

Рис. 7.

из которых пересекает кривую C_3 ровно в одной вещественной точке (рис. 8).

Кривая C_4 задается уравнением $lC_3 + tl_1l_2l_3l_4 = 0$; она изображена пунктиром на рис. 8.

Построение кривой C_5 с помощью кривой C_4 изображено на рис. 9. Кривая C_n при $n \geq 5$ строится аналогично.

При нечетном n на луче $A_1\infty$ выбирается n точек и через них проводятся прямые, не пересекающие кривую C_{n-1}, а при четном n на отрезке A_1A_2 выбирается n точек и через них проводятся прямые, каждая из которых пересекает кривую C_{n-1} ровно в одной точке. Если количество компонент кривой C_{n-1} равно N, то количество компонент кривой C_n равно $N + (n-2)$. Поэтому количество компонент кривой C_n равно

$$1 + 1 + 2 + \ldots + (n-2) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1.$$

6. Формулы Плюккера

Прямой l в $\mathbf{C}P^2$, заданной уравнением $ax + by + cz = 0$, можно сопоставить точку $l^* = (a, b, c)$. И наоборот, точке $A = (a, b, c)$ можно сопоставить прямую A^*, заданную уравнением $ax + by + cz = 0$. Ясно, что при этом $(l^*)^* = l$ и $(A^*)^* = A$. Сопоставление $A \longleftrightarrow A^*$ называют **проективной двойственностью**. Отметим, что это сопоставление не инвариантно, так как оно использует систему координат и при замене координат может получиться другое сопоставление.

Рис. 8.

Рис. 9.

Рис. 10.

Проективная двойственность обладает следующим важным свойством: точки A и B лежат на прямой l тогда и только тогда, когда прямые A^* и B^* пересекаются в точке l^*. В самом деле, пусть точки (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) лежат на прямой $ax + by + cz = 0$. Тогда $aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0$ и $aa_2 + bb_2 + cc_2 = 0$, а значит, прямые $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2z = 0$ проходят через точку (a, b, c).

С помощью проективной двойственности кривой $C \subset \mathbf{C}P^2$ можно сопоставить **двойственную кривую** $C^* \subset \mathbf{C}P^2$. Делается это следующим образом. Каждой неособой точке кривой C можно сопоставить прямую l, касающуюся C в данной точке, а прямой l можно сопоставить точку l^*. Кривая C^* представляет собой замыкание множества всех точек l^*, полученных таким образом.

Для двойственных кривых выполняется соотношение $(C^*)^* = C$. Для доказательства этого свойства достаточно заметить, что если точка A стремится к кривой C, то прямая A^* стремится к касательной к кривой C^* (рис. 10). Поэтому касательной к кривой C^* будет двойственна точка кривой C.

Задача 6.1. Доказать, что выпуклой кривой двойственна выпуклая кривая. (Замкнутая кривая на плоскости $\mathbf{R}^2$ называется **выпуклой**, если она ограничивает выпуклую фигуру.)

Задача 6.2. **а)** Доказать, что эллипсу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ двойствен эллипс $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$.

б) Доказать, что любой неособой кривой второй степени двойственна кривая второй степени.

Теорема 6.1. Если кривая C алгебраическая, то кривая C^* тоже алгебраическая.

Доказательство. Пусть кривая C задается в $\mathbf{C}P^2$ уравнением $F(x, y, z) = 0$. Касательная в точке $(x_0, y_0, z_0) \in C$ задается уравнением

Рис. 11.

$$xF_x + yF_y + zF_z = 0,$$

где производные F_x, F_y и F_z берутся в точке (x_0, y_0, z_0). Двойственная кривая C^* состоит из точек с координатами (F_x, F_y, F_z). Требуется доказать, что переменные $x_1 = F_x(x_0, y_0, z_0), y_1 = F_y(x_0, y_0, z_0)$ и $z_1 = F_z(x_0, y_0, z_0)$ связаны некоторым алгебраическим соотношением $G(x_1, y_1, z_1) = 0$. Добавим к соотношениям $x_1 = F_x, y_1 = F_y, z_1 = F_z$ соотношение $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ (или эквивалентное ему соотношение $x_1x_0 + y_1y_0 + z_1z_0 = 0$). Тогда из этих четырех соотношений можно будет исключить x_0, y_0 и z_0. В результате получим алгебраическое соотношение между x_1, y_1 и z_1. $\square$

Степень кривой C^* называют **классом** кривой C. Иными словами, класс кривой C — это количество точек пересечения кривой C^* с прямой общего положения, то есть количество касательных к кривой C, проходящих через точку общего положения.

Если кривая C неособая, то кривая C^* не обязательно будет неособой. Дело в том, что двойной касательной соответствует точка самопересечения, а касательной в точке перегиба соответствует точка возврата (рис. 11).

Первое из этих свойств очевидно, поэтому обсудим лишь второе свойство. Рассмотрим кривую $y = x^3$, для которой точка (0,0) является точкой перегиба. Касательная к этой кривой в точке (x_0, y_0) задается уравнением $y - y_0 = 3x_0^2(x - x_0)$, то есть

$$-3x_0^2x + y + 2x_0^3 = 0.$$

Поэтому точке $(x_0, x_0^3, 1) \in \mathbf{C}P^2$ сопоставляется точка $(-3x_0^2, 1, 2x_0^3) = (-3x_0^{-1}/2, x_0^{-3}/2, 1)$. Таким образом, двойственная кривая состоит из точек $(x_1, y_1, 1)$, где $x_1 = -3x_0^{-1}/2, y_1 = x_0^{-3}/2$. Эта кривая задается уравнением $(-2x_1/3)^3 = 2y_1$. Кривая получилась почти та же самая,

Рис. 12.

Рис. 13.

но при этом точке (0,0,1) исходной кривой соответствует точка (0,1,0) двойственной кривой. В окрестности точки (0,1,0) двойственной кривой удобно использовать координаты $(x_1, 1, z_1)$. При этом $x_1 = -3x_0$ и $z_1 = 2x_0^3$, то есть в этих координатах двойственная кривая задается уравнением $27z_1^2 + x_1^3 = 0$. Таким образом, точке перегиба (рис. 12(а)) двойственна точка возврата (рис. 12(б)).

Эллипсы $\frac{x^2}{a^2} + a^2y^2 = 1$ и $a^2x^2 + \frac{y^2}{a^2} = 1$ двойственны друг другу, поэтому кривая, состоящая из пары этих эллипсов, двойственна сама себе. Воспользовавшись этим свойством, а также тем, что точке перегиба двойственна точка возврата, а двойной касательной двойственна точка самопересечения, нетрудно убедиться, что кривые, изображенные на рис. 13, двойственны друг другу.

Предположим, что особыми точками кривых C и C^* являются лишь двукратные точки самопересечения и точки возврата. Пусть n — степень кривой C, δ — число ее точек самопересечения, k — число точек возврата; n^*, δ^* и k^* — аналогичные числа для кривой C^*. Плюккер доказал, что эти числа связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} &n^* = n(n-1) - 2\delta - 3k, && 3n(n-2) = k^* + 6\delta + 8k, \\ &n = n^*(n^*-1) - 2\delta^* - 3k^*, && 3n^*(n^*-2) = k + 6\delta^* + 8k^*. \end{aligned}$$

Эти соотношения не являются независимыми. Легко проверить, что любое из них можно представить в виде линейной комбинации трех остальных соотношений.

Прежде чем доказывать формулы Плюккера, обсудим некоторые их приложения. Для неособой кривой $\delta = 0$ и $k = 0$, поэтому

$$k^* = 3n(n-2), \qquad \delta^* = \frac{n(n-3)(n^2+n-6)}{2}.$$

Напомним, что k^* — количество точек перегиба кривой C, а δ^* — количество двойных касательных кривой C. В частности, неособая кривая степени 3 имеет ровно 9 точек перегиба и не имеет двойных касательных, а неособая кривая степени 4 имеет ровно 24 точки перегиба и ровно 28 двойных касательных.

Непосредственным следствием того, что любая неособая кривая степени 4 имеет ровно 28 двойных касательных, является следующее утверждение.

Теорема 6.2. Любая неособая кубическая поверхность K в $\mathbf{C}P^3$ содержит ровно 27 прямых.

Доказательство. Выберем точку $O \in K$ и спроецируем K из точки O на некоторую плоскость $\mathbf{C}P^2 \subset \mathbf{C}P^3$. Точка O входит в число прообразов точки $X \in \mathbf{C}P^2$ при рассматриваемой проекции лишь в том случае, когда прямая XO касается K в точке O. Почти все прямые пересекают поверхность K ровно в трех точках, поэтому для почти всех точек $X \in \mathbf{C}P^2$ прообраз состоит ровно из двух точек. Точки $\mathbf{C}P^2$, для которых прообраз состоит ровно из одной точки, образуют некоторую кривую Γ — **кривую ветвления**. Проверим, что кривая ветвления имеет степень 4, то есть почти все прямые (лежащие в $\mathbf{C}P^2$) пересекают ее ровно в четырех точках.

Пусть l — некоторая прямая в $\mathbf{C}P^2$. Плоскость, проходящая через точку O и прямую l, пересекает поверхность K по некоторой кубической кривой C, содержащей точку O. Точкам кривой ветвления Γ соответствуют касательные к кривой C, проведенные из точки O (рис. 14); при этом касательная O в точке не учитывается, если только она не является двукратной касательной, то есть касательной в точке перегиба. Для

Рис. 14.

прямой l общего положения получаем ровно 4 касательных, то есть 4 точки пересечения с кривой Γ.

Если точка O и плоскость $\mathbf{C}P^2$ выбраны в общем положении, то кривая ветвления Γ будет неособой кривой общего положения, поэтому у нее будет ровно 28 двойных касательных. Покажем, что одна из этих двойных касательных соответствует касательной плоскости к поверхности K в точке O, а остальные 27 двойных касательных соответствуют прямым, лежащим на поверхности K.

Прежде всего убедимся, что через точку $O \in K$ общего положения не проходит прямая, целиком лежащая в K. Для этого достаточно проверить, что прямые, целиком лежащие в K, образуют дискретное множество в пространстве всех прямых в $\mathbf{C}P^3$. В окрестности прямой $z = 0, w = 0$, расположенной в $\mathbf{C}P^3$, прямые задаются уравнениями $z = a_1x + b_1y, w = a_2x + b_2y$. В самом деле, при малом шевелении точек (1,0,0,0) и (0,1,0,0) в плоскостях $y = 0$ и $x = 0$, трансверсальных рассматриваемой прямой, получим точки $(1, 0, a_1, a_2)$ и $(0, 1, b_1, b_2)$. Таким образом, прямая, достаточно близкая к прямой $z = 0, w = 0$, проходит через точки $(1, 0, a_1, a_2)$ и $(0, 1, b_1, b_2)$, поэтому она задается уравнениями $z = a_1x + b_1y, w = a_2x + b_2y$.

Поверхность K задается уравнением $f(x, y, z, w) = 0$. Предположим, что прямая $z = 0, w = 0$ целиком лежит на этой поверхности, то есть $f(x, y, 0, 0) = 0$ при всех x, y. Подставим уравнения прямой $z = a_1x + b_1y, w = a_2x + b_2y$ в уравнение поверхности K. В результате получим:

$$f(x, y, a_1x + b_1y, a_2x + b_2y) = \sum f_i x^{3-i} y^i, \tag{4}$$

где $f_i = f_i(a_1, a_2, b_1, b_2)$. Прямая целиком лежит на поверхности K тогда и только тогда, когда $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0$. В точке (0,0,0,0) функции f_i обращаются в нуль. Проверим, что в этой точке их градиенты линейно независимы. Предположим противное. Тогда в точке (0,0,0,0) выполняются равенства

$$\lambda_1 \frac{\partial f_i}{\partial a_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_i}{\partial a_2} + \mu_1 \frac{\partial f_i}{\partial b_1} + \mu_2 \frac{\partial f_i}{\partial b_2} = 0, \tag{5}$$

где числа $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ не равны нулю одновременно.

Продифференцировав обе части равенства (4) по a_1, получим

$$x \frac{\partial f}{\partial z} = \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial f_i}{\partial a_1} x^{3-i} y^i.$$

Аналогичные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}
&(\lambda_1 x + \mu_1 y)\frac{\partial f}{\partial z} + (\lambda_2 x + \mu_2 y)\frac{\partial f}{\partial w} = \\
= \ &\sum_{i=0}^{3} x^{3-i} y^i \left(\lambda_1 \frac{\partial f_i}{\partial a_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_i}{\partial a_2} + \mu_1 \frac{\partial f_i}{\partial b_1} + \mu_2 \frac{\partial f_i}{\partial b_2} \right).
\end{aligned}$$

В том случае, когда $(a_1, a_2, b_1, b_2) = (0, 0, 0, 0)$, то есть

$$(x, y, a_1 x + b_1 y, a_2 x + b_2 y) = (x, y, 0, 0),$$

можно воспользоваться равенством (5). В результате получим

$$(\lambda_1 x + \mu_1 y)\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, 0, 0) + (\lambda_2 x + \mu_2 y)\frac{\partial f}{\partial w}(x, y, 0, 0) = 0.$$

При этом $\frac{\partial f}{\partial z}$ и $\frac{\partial f}{\partial w}$ — однородные многочлены второй степени. Два многочлена второй степени могут совпасть после домножения на линейные множители лишь в том случае, когда у этих многочленов есть общий корень. Поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial z}(\alpha, \beta, 0, 0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial w}(\alpha, \beta, 0, 0) = 0,$$

где $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

Прямая $z = 0$, $w = 0$ целиком лежит на поверхности $f = 0$. Поэтому $f(x, y, z, w) = zq(x, y, z, w) = wh(x, y, z, w)$, а значит,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, 0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, 0, 0) = 0.$$

Таким образом, $(\alpha, \beta, 0, 0)$ — особая точка поверхности $f = 0$, что противоречит условию. Следовательно, точка (0,0,0,0) является изолированной точкой пересечения поверхностей $f_i = 0$, то есть в достаточно малой окрестности прямой $z=0, w=0$ нет других прямых, целиком лежащих на поверхности $f=0$.

В дальнейшем будем считать, что выбранная точка $O \in K$ не лежит на прямых, целиком содержащихся в K.

Пусть $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ — некоторая точка в $\mathbf{C}P^3$. Тогда

$$f(O+tX)=t\sum x_i f_i(O)+\frac{t^2}{2}\sum x_i x_j f_{ij}(O)+\ldots,$$

где $f_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}, f_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Уравнение $\sum x_i f_i(O)=0$ задает касательную плоскость к поверхности K в точке O, а уравнение $\sum x_i x_j f_{ij}(O)=0$ задает квадрику, касающуюся касательной плоскости. Касательная плоскость пересекает невырожденную квадрику в $\mathbf{C}P^3$ по двум различным прямым. Эти прямые будут касательные в точке O к сечению поверхности K касательной плоскостью. В таком случае сечение будет кубической кривой с точкой самопересечения O. Если же квадрика $\sum x_i x_j f_{ij}(O)=0$ вырожденная, то касательная плоскость пересекает ее по одной прямой, которая получается в результате слияния двух различных прямых. В таком случае сечение поверхности K касательной плоскостью будет кубической кривой с точкой возврата.

Функцию $H_f=\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ называют **гессианом** функции f. Если O — неособая точка кубической поверхности K, заданной уравнением $f=0$, причем через точку O не проходят прямые, целиком лежащие в K, то сечение K касательной плоскостью в точке O будет кривой с точкой возврата тогда и только тогда, когда $H_f(O)=0$. Кубическая поверхность K общего положения не содержится в поверхности $H_f=0$. В самом деле, пропорциональность H_f функции f представляет собой некоторое алгебраическое условие на коэффициенты многочлена f, причем для $f=x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3$ получаем $H_f=1296x_1x_2x_3x_4$, то есть это алгебраическое условие не тождественно.

Мы не будем разбирать случай, когда гессиан H_f пропорционален f, то есть мы будем считать, что сечение поверхности K касательной плоскостью в точке O общего положения представляет собой кубическую кривую с точкой самопересечения O. Дело в том, что если сечение касательной плоскостью представляет собой кубическую кривую с точкой возврата, то при проекции на $\mathbf{C}P^2$ получается кривая ветвления Γ, имеющая четырехкратную касательную, а это уже будет не кривая общего положения.

Все возможные типы особых сечений поверхности K плоскостями, проходящими через точку O, изображены на рис. 15.

В случае (а) получаем касательную общего положения; в случае (в)

Рис. 15.

получаем касательную в точке перегиба. В случаях (б) и (г) получаем двойные касательные. При этом случай (б) встречается ровно один раз — он соответствует касательной плоскости, а случай (г) встречается ровно 27 раз. В случае (г) кубическая кривая распадается на конику, проходящую через точку O, и прямую; эта прямая, разумеется, лежит на поверхности K. $\square$

Займемся, наконец, доказательством формул Плюккера. Прежде всего докажем формулу $n(n-1) = n^* + 2\delta + 3k$; из нее переходом к двойственной кривой можно получить формулу $n^*(n^*-1) = n + 2\delta^* + 3k^*$.

Фиксируем точку $P = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbf{C}P^2$. Будем считать, что по отношению к рассматриваемой кривой $f = 0$ точка P является точкой общего положения, то есть из нее можно провести ровно n^* различных касательных к кривой. Рассмотрим разложение

$$f(X + tP) = f(X) + t \sum p_i f_i(X) + \frac{t^2}{2} \sum p_i p_j f_{ij}(X) + \dots$$

Это разложение показывает, что прямая PX пересекает кривую $f = 0$ в точке X не менее чем двукратно тогда и только тогда, когда точка X лежит на пересечении кривых $f = 0$ и $g = 0$, где $g(X) = \sum p_i f_i(X)$ — кривая степени $n - 1$. Таким образом, точки пересечения кривых $f = 0$ и $g = 0$ бывают следующих трех типов:

(1) точки касания кривой $f = 0$ с касательными, проведенными из точки P;

(2) точки самопересечения кривой $f = 0$;

(3) точки возврата кривой $f=0$.

По теореме Безу количество точек пересечения кривых $f=0$ и $g=0$ с учетом кратности равно $n(n-1)$. Поэтому формула $n(n-1)=n^*+2\delta+3k$ будет доказана, если мы убедимся, что точки типа (1) — однократные точки пересечения кривых $f=0$ и $g=0$, точки типа (2) — двукратные, а точки типа (3) — трехкратные.

Тип (1). Пусть $X=(0,0,1), P=(p_x,0,p_z)$, где $p_x\neq 0$. Прямая PX, задаваемая уравнением $y=0$, пересекает кривую $f=0$ в точке X двукратно. Это означает, что $f(x,y,z)=z^{n-1}y+z^{n-2}(ax^2+bxy+cy^2)+\dots$, причем $a\neq 0$. В самом деле, пусть

$$f(x,y,z)=a_0z^n+(a_1x+b_1y)z^{n-1}+(a_2x^2+b_2xy+c_2y^2)z^{n-2}+\dots$$

Уравнение $f(x,0,z)=0$, то есть $a_0z^n+a_1xz^{n-1}+a_2x^2z^{n-2}+\dots$, должно иметь двукратный корень $x=0$. Поэтому $a_0=0, a_1=0$ и $a_2\neq 0$. Кроме того, $b_1\neq 0$, так как иначе точка X была бы особой.

Вторая кривая задается уравнением $p_x\frac{\partial f}{\partial x}+p_z\frac{\partial f}{\partial z}=0$, то есть $z^{n-2}(2ax+by)p_x+(n-1)z^{n-2}yp_z+\dots=0$. Касательная в точке $X=(0,0,1)$ к этой кривой задается уравнением $(2ax+by)p_x+(n-1)yp_z=0$. Так как $a\neq 0$, эта прямая отлична от прямой $y=0$. Поэтому кривые $f=0$ и $g=0$ пересекаются в точке X трансверсально.

Тип (2). Пусть $X=(0,0,1)$ и касательные в точке X к ветвям кривой $f=0$ задаются уравнениями $x=0$ и $y=0$. Тогда $f(x,y,z)=z^{n-2}xy+\dots$ Пусть $P=(p_x,p_y,p_z)$, где $p_xp_y\neq 0$. Тогда вторая кривая задается уравнением $z^{n-2}(p_xx+p_yy)+\dots=0$. Касательная к этой кривой в точке X задается уравнением $p_xx+p_yy=0$. Это означает, что кривая $g=0$ пересекает обе ветви кривой $f=0$ в точке X трансверсально, поэтому кратность пересечения кривых равна 2.

Тип (3). Пусть $X=(0,0,1)$ и касательная в точке X к кривой $f=0$ задается уравнением $y=0$. Тогда $f(x,y,z)=z^{n-2}y^2+\dots$ Пусть $P=(p_x,p_y,p_z)$, причем $p_y\neq 0$. Вторая кривая задается уравнением $2z^{n-2}yp_y+\dots=0$. Касательная к этой кривой в точке X задается уравнением $y=0$ (рис. 16). Поэтому кратность пересечения кривых $f=0$ и $g=0$ в точке X равна 3.

Формула $3n(n-2)=k^*+6\delta+8k$ доказывается аналогично, то есть мы снова рассмотрим точки пересечения кривой $f=0$ с некоторой кривой $h=0$. Определение кривой $h=0$ тоже основано на разложении

$$f(X+tP)=f(X)+t\sum p_if_i(X)+\frac{t^2}{2}\sum p_ip_jf_{ij}(X)+\dots$$

Рис. 16.

Но на этот раз нас будет интересовать не линейная, а квадратичная часть разложения, причем точка P будет не фиксированной, а переменой. Тогда выражение $p_i p_j f_{ij}(X)$ можно рассматривать как квадратичную форму от P. Эта квадратичная форма будет вырожденной тогда и только тогда, когда $\det(f_{ij}(X)) = 0$. Функцию $h(X) = \det(f_{ij}(X))$ называют **гессианом функции** f, а кривую $h = 0$ называют **гессианом кривой** $f = 0$. Отметим, что кривая $h = 0$ не зависит от выбора координат в $\mathbf{C}P^2$, хотя сама функция h зависит от выбора координат (при переходе к другой системе координат h умножается на квадрат определителя матрицы замены координат). Функция f_{ij} представляет собой однородный многочлен степени $n-2$, поэтому определитель матрицы размером 3×3, элементами которой являются функции f_{ij}, представляет собой однородный многочлен степени $3(n-2)$.

Количество точек пересечения кривых $f = 0$ и $h = 0$ с учетом их кратностей равно $3n(n-2)$. Проверим, что точками пересечения этих кривых являются в точности:

(1) точки перегиба кривой $f = 0$;

(2) точки самопересечения кривой $f = 0$;

(3) точки возврата кривой $f = 0$.

(Напомним, что по предположению у кривой $f = 0$ нет более сложных особых точек, чем точки самопересечения и точки возврата.)

Неособая точка X кривой $f = 0$ является точкой перегиба тогда и только тогда, когда касательная PX, заданная уравнением $\sum p_i f_i(X) = 0$, пересекает кривую $f = 0$ в точке X с кратностью 3. Это условие эквивалентно тому, что коника $\sum p_i p_j f_{ij}(X) = 0$ содержит прямую $\sum p_i f_i(X) = 0$. Рассматриваемая коника всегда касается рассматриваемой прямой, поэтому коника содержит прямую тогда и только тогда, когда коника вырожденная, то есть $h(X) = 0$.

Если же точка X особая, то в случае, когда X — точка самопересечения, коника представляет собой пару прямых, касающихся ветвей кривой $f=0$, а в случае, когда X — точка возврата, коника представляет собой пару слившихся касательных к кривой $f=0$ в точке X. В обоих случаях $h(X)=0$.

Более кратко описать точки пересечения кривой и ее гессиана можно следующим образом: точка X кривой $f=0$ лежит на гессиане $h=0$ тогда и только тогда, когда через точку X можно провести прямую, пересекающую кривую $f=0$ в точке X с кратностью не менее 3. Если $X=(0,0,1)$ и прямая $y=0$ пересекает кривую $f=0$ в точке X с кратностью не менее 3, то

$$f=z^{n-1}ay+\frac{1}{2}z^{n-2}(2bxy+cy^2)+\dots$$

Вычислим кратности точек пересечения кривых $f=0$ и $h=0$ в случаях (1)–(3). При этом мы будем учитывать лишь главную часть функции f в точке (0,0,1), то есть наиболее высокие степени z.

Тип (1) — точка перегиба. В этом случае

$$f=z^{n-1}y+\frac{1}{2}z^{n-2}(2bxy+cy^2)+\frac{1}{6}z^{n-3}(dx^3+\dots),$$

причем $d\neq 0$, так как иначе кратность пересечения кривой $f=0$ и прямой $y=0$ была бы больше 3. Главная часть гессиана h равна

$$\begin{vmatrix} dz^{n-3}x & bz^{n-2} & b(n-2)z^{n-3}y \\ bz^{n-2} & cz^{n-2} & (n-1)z^{n-2} \\ b(n-2)z^{n-3}y & (n-1)z^{n-2} & (n-1)(n-2)z^{n-3}y \end{vmatrix} = \\ =(n-1)z^{3n-7}(-d(n-1)x+b^2(n-2)y+\dots).$$

Поэтому касательная к гессиану в точке (0,0,1) задается уравнением $-d(n-1)x+b^2(n-2)y=0$. Эта касательная трансверсальна прямой $y=0$, поэтому кратность пересечения кривых $f=0$ и $h=0$ в точке (0,0,1) равна 1.

Тип (2) — точка самопересечения вида $xy=0$. В этом случае

$f=z^{n-2}xy+\frac{1}{6}z^{n-3}(ax^3+3bx^2y+3cxy^2+dy^3)+\dots$, причем $a\neq 0$ и $d\neq 0$, так как иначе кратность пересечения кривой $f=0$ с прямыми $x=0$ и $y=0$ в точке (0,0,1) была бы больше 3. Для нахождения ветвей кривой $f=0$, проходящих через особую точку (0,0,1), удобно использовать многоугольник Ньютона. Он строится следующим образом: для каждого члена x^py^q многочлена f отмечаем точку с координатами (p,q), а затем берем выпуклую оболочку отмеченных точек. Ветви кривой соответствуют тем сторонам многоугольника Ньютона, продолжения которых отделяют многоугольник от начала координат. (Доказательство

Рис. 17.

мы приведем чуть позже.) Для рассматриваемой кривой многоугольник Ньютона изображен на рис. 17. Стороны этого многоугольника соответствуют ветвям $yz + \frac{1}{6}ax^2 = 0$ и $xz + \frac{1}{6}dy^2 = 0$.

Несложные вычисления показывают, что главная часть гессиана имеет вид

$$(n-1)\Big[(n-2)z^{3n-8}xy - \frac{1}{6}z^{3n-9}\Big(nax^2 + 3(8-3n)bx^2y +$$

$$+ \quad 3(8-3n)cx^2y + ndy^3\Big)\Big].$$

Для гессиана многоугольник Ньютона тот же самый, поэтому ветви гессиана задаются уравнениями $(n-2)yz - \frac{1}{6}nax^2 = 0$ и $(n-2)xz - \frac{1}{6}ndy^2 = 0$. Кривые $yz + \frac{1}{6}ax^2 = 0$ и $(n-2)yz - \frac{1}{6}nax^2 = 0$ не совпадают, поэтому кратность пересечения соответствующих ветвей кривых $f = 0$ и $h = 0$ в точке (0,0,1) равна 2. Кривые $f = 0$ и $h = 0$ в окрестности точки (0,0,1) изображены на рис. 18. Каждая из двух ветвей гессиана пересекает одну ветвь исходной кривой трансверсально, а другую ветвь — с кратностью 2. Поэтому общая кратность пересечения кривых в этой точке равна 6.

Тип (3) — точка возврата вида $y^2 = x^3$. В этом случае

$$f = \frac{1}{2}z^{n-2}y^2 + \frac{1}{6}z^{n-3}(ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3) + \ldots$$

Главная часть гессиана имеет вид:

$$-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)z^{3n-9}y^2(ax+by).$$

Диаграмма Ньютона (рис. 19) показывает, что интерес для нас представляет еще лишь коэффициент при $z^{3n-10}x^4$.

Рис. 18.

Рис. 19.

Рис. 20.

Этот коэффициент равен $-\frac{1}{12}a^2(n-1)(n-3)$. Таким образом, через точку (0,0,1) проходят две ветви гессиана, задаваемые уравнениями $ax+by=0$ и $(n-2)y^2+\frac{1}{6}(n-3)ax^3=0$ (рис. 20).

Так как $a \neq 0$, прямая $ax+by=0$ пересекает кривую $f=0$ двукратно. Проверим, что кратность пересечения другой ветви гессиана с кривой $f=0$ равна 6, то есть общая кратность пересечения кривой и гессиана в точке возврата равна 8.

Результант многочленов $f(y)=y^3+ax^2$ и $g(y)=y^3+bx^2$ равен

$$\det\begin{pmatrix} I & ax^2I \\ I & bx^2I \end{pmatrix} = \det(bx^2I-ax^2I)=(b-a)^3x^6$$

(здесь I — единичная матрица размером 3×3). В однородных координатах результант равен $(b-a)^3x^6z^3$. Поэтому кривые $y^3+ax^2z=0$ и $y^3+bx^2z=0$ при $a\neq b$ пересекаются 6-кратно в точке (0,0,1) и 3-кратно в точке (1,0,0).

В итоге получаем $3n(n-2)=k^*+6\delta+8k$, где k^* — количество точек возврата двойственной кривой, то есть количество точек перегиба исходной кривой, δ — количество точек самопересечения, k — количество точек возврата. Для двойственной кривой получаем $3n^*(n^*-2)=k+6\delta^*+8k^*$. Доказательство соотношений Плюккера завершено.

Объясним теперь более подробно, как с помощью диаграммы (многоугольника) Ньютона находятся ветви кривой, проходящие через особую точку (0,0). Рассмотрим кривую $\sum a_i x^{m_i} y^{n_i} = 0$. Ветви этой кривой, проходящие через точку (0,0), задаются уравнениями вида $y=x^\alpha\varphi(x)$, где $\varphi(x)\to a\neq 0$ при $x\to 0$. Подставив такое выражение в уравнение кривой, получим

$$\sum a_i x^{m_i+\alpha n_i}\varphi_i(x) = 0. \qquad (6)$$

Предположим, что одно из чисел $m_k + \alpha n_k$ меньше всех остальных. Сократив (6) на $x^{m_k+\alpha n_k}$, получим $a_k\psi_1(x)+\psi_2(x) = 0$, причем $\lim\limits_{x\to 0}\psi_1(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\psi_2(x) = 0$. Приходим к противоречию, поэтому при данном α по крайней мере два числа $m_i + \alpha n_i$ и $m_j + \alpha n_j$ должны совпадать и быть меньше всех остальных чисел такого вида. Если минимальным является число $m_i + \alpha n_i = m_j + \alpha n_j = \ldots = m_s + \alpha n_s$, то соответствующая ветвь задается (приближенно) уравнением

$$a_i x^{m_i} y^{n_i} + a_j x^{m_j} y^{n_j} + \ldots + a_s x^{m_s} y^{n_s} = 0;$$

количество слагаемых в этом уравнении равно количеству отмеченных точек, лежащих на соответствующей стороне многоугольника Ньютона. Геометрический смысл того, что число $m_i + \alpha n_i = \ldots = m_s + \alpha n_s$ минимально, достаточно прост. При данном α уравнения $m + \alpha n = k$ при различных k задают семейство параллельных прямых на плоскости с координатами (m, n), причем величина k минимальна для прямой, которая расположена ближе всего к началу координат. Это означает, что ветвям кривой $f = 0$ соответствуют лишь те прямые, которые содержат стороны многоугольника Ньютона, причем многоугольник и начало координат должны лежать по разные стороны от этих прямых.

Задача 6.3. С помощью диаграммы Ньютона найти ветви следующих кривых в точке (0,0):

а) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$;

б) $(x + y)(x^2 + y^2) + x(x - y) = 0$;

в) $y^2 + x^2(x - y) = 0$.

7. Кривые в пространстве

Система уравнений $f_1 = 0, \ldots, f_k = 0$, где f_i — однородный многочлен от $n+1$ переменных, задает алгебраическое многообразие в $\mathbf{C}P^n$. В том случае, когда (комплексная) размерность этого многообразия равна 1, это многообразие называют **алгебраической кривой** в $\mathbf{C}P^n$. **Степенью** кривой называют при этом количество точек пересечения кривой с гиперплоскостью общего положения.

В качестве примера кривой в $\mathbf{C}P^n$ рассмотрим образ $\mathbf{C}P^1$ при отображении

$$(x, y) \mapsto (x^n, x^{n-1}y, \ldots, y^n). \qquad (7)$$

Эту кривую можно задать системой уравнений

$$z_1^2 = z_0 z_2,\ z_2^2 = z_1 z_3, \ldots,\ z_{n-1}^2 = z_{n-2} z_n.$$

Обозначим полученную кривую Γ_n. Отображение (7) взаимно однозначно, поэтому род кривой Γ_n равен 0. Легко проверить, что степень кривой Γ_n равна n. В самом деле, гиперплоскость $a_0 z_0 + a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n 0$ пересекает кривую Γ_n в таких точках, что $a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, где $t = x/y$. Таким образом, точки пересечения кривой Γ_n и гиперплоскости соответствуют корням многочлена степени n, а в общем положении многочлен степени n имеет ровно n корней.

Часть кривой Γ_n, лежащая в $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}P^n \subset \mathbf{C}P^n$, состоит из точек с координатами $(t, t^2, t^3, \ldots, t^n)$. Эта кривая обладает многими замечательными свойствами. Приведем два из них.

Теорема 7.1. Через любые n точек кривой $(t, t^2, \ldots, t^{2n})$ в пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ можно провести гиперплоскость так, что вся кривая будет лежать по одну сторону от нее.

Доказательство. Для точек $A_i = (t_i, t_i^2, \ldots, t_i^{2n}), i = 1, \ldots, n$, рассмотрим многочлен

$$(t - t_1)^2 \ldots (t - t_n)^2 = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n = p(t).$$

Требуемая гиперплоскость задается уравнением $l(X) = 0$, где $l(X) = a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$. В самом деле, пусть $A = (t, t^2, \ldots, t^{2n})$ — точка данной кривой. Тогда $l(A) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n = (t - t_1)^2 \ldots (t - t_n)^2 \geq 0$. $\square$

При $n = 2$ теорема 7.1 означает следующее. Если $A_1, \ldots, A_m$ — произвольные точки кривой (t, t^2, t^3, t^4), то любые две вершины их выпуклой оболочки соединены ребром. Легко проверить, что в $\mathbf{R}^3$ нельзя выбрать более четырех точек, обладающих таким свойством.

Теорема 7.2. Любые $n+1$ точек кривой $(t, t^2, \ldots, t^n)$ в $\mathbf{R}^n$ являются вершинами невырожденного n-мерного симплекса.

Доказательство. Объем симплекса с вершинами $(t_i, t_i^2, \ldots, t_i^n)$ равен

$$\pm \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 1 & t_1 & \ldots & t_1^n \\ & \ldots & \ldots & \\ 1 & t_{n+1} & \ldots & t_{n+1}^n \end{vmatrix} \neq 0. \quad \square$$

С помощью теоремы 7.2 можно доказать, что любой n-мерный симплициальный комплекс можно вложить в пространство $\mathbf{R}^{2n+1}$. Для этого достаточно поместить его вершины в различные точки кривой $(t, \ldots t^{2n+1})$. Тогда вершины двух n-мерных симплексов Δ_1^n и Δ_2^n с попарно различными вершинами будет порождать невырожденный симплекс

Δ^{2n+1}, поэтому у симплексов Δ_1^n и Δ_2^n не будет общих точек. Если же у симплексов Δ_1^n и Δ_2^n будут общие вершины, то пересечение этих симплексов будет состоять лишь из симплекса, порожденного их общими вершинами.

Еще один интересный пример кривой дает пересечение двух квадрик в $\mathbf{C}P^3$. Сечение двух квадрик в $\mathbf{C}P^3$ гиперплоскостью общего положения представляет собой пару коник общего положения. Они пересекаются в четырех точках, поэтому рассматриваемая кривая имеет степень 4. Покажем, что рассматриваемая кривая имеет род 1, то есть она гомеоморфна тору. Рассмотрим для этого отображение $p : \mathbf{C}P^3 - (0,0,0,1) \to \mathbf{C}P^2$, переводящее точку (x, y, z, w) в точку (x, y, z). При этом пересечение квадрик $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$ и $ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = 0$ переходит в конику $ax^2 + by^2 + cz^2 = d(x^2 + y^2 + z^2)$; это отображение является 2-листным разветвленным накрытием с точками ветвления в точках пересечения коник $ax^2+by^2+cz^2 = 0$ и $x^2+y^2+z^2 = 0$. Получаем 2-листное разветвленное накрытие сферы S^2 с 4 точками ветвления. Поэтому накрывающее многообразие представляет собой тор.

Задача 7.1. а) Доказать, что отображение

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1^2, x_1x_2, x_2^2)$$

является гомеоморфизмом $\mathbf{C}P^1$ на конику $z_2^2 = z_1z_3$ в $\mathbf{C}P^2$.

б) Доказать, что отображение

$$\{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\} \mapsto (x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2)$$

является гомеоморфизмом $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1$ на квадрику $z_1z_4 = z_2z_3$ в $\mathbf{C}P^3$.

Для кривой Γ в $\mathbf{C}P^n$ можно рассмотреть проекцию на гиперплоскость $\mathbf{C}P^{n-1}$ из некоторой точки O. В том случае, когда гиперплоскость и точка O берутся в общем положении (в частности, $O \notin \Gamma$), степень кривой совпадает со степенью ее проекции Γ'. А в том случае, когда O — точка общего положения на кривой Γ, степень Γ' будет на 1 меньше степени Γ. Дело в том, что сечениям кривой Γ' гиперплоскостями в $\mathbf{C}P^{n-1}$ соответствуют сечения кривой Γ гиперплоскостями в $\mathbf{C}P^n$, проходящими через точку O. При этом точкам $A_1', \dots, A_m'$ кривой Γ' соответствуют точки $A_1, \dots, A_m$ кривой Γ. Если $O \notin \Gamma$, то сечение кривой Γ состоит из точек $A_1, \dots, A_m$, а если $O \in \Gamma$, то сечение кривой Γ состоит из точек $O, A_1, \dots, A_m$. В первом случае степени кривой Γ и Γ' равны m, а во втором случае степень кривой Γ равна $m+1$, а степень кривой Γ' равна m.

Чтобы при проецировании кривой Γ не появлялись новые особые точки, нужно избегать проекций в направлении X_1X_2, где $X_1, X_2 \in \Gamma$ (рис.

Рис. 21.

21).

Точки прямых вида X_1X_2 образуют многообразие размерности не более 3 (один параметр соответствует точке X_1, другой параметр соответствует точке X_2, а третий параметр соответствует положению точки на прямой X_1X_2). Кроме того, нужно избегать проекций в направлении касательной к кривой Γ (это соответствует совпадению точек X_1 и X_2). Но точки касательных образуют многообразие размерности не более 2.

При $n > 3$ для кривой в $\mathbf{C}P^n$ запрещенные точки заполняют не все пространство, поэтому найдется точка, из которой кривую можно спроецировать так, чтобы не появилось новых особых точек. Эта конструкция позволяет кривую в $\mathbf{C}P^n$ вложить в $\mathbf{C}P^3$.

Для кривой в $\mathbf{C}P^3$ точку O можно выбрать так, чтобы она не лежала на прямых, проходящих через тройки точек кривой, и на прямых, касающихся кривой в двух точках. Это позволяет построить погружение кривой в $\mathbf{C}P^2$, при котором дополнительно появляются лишь простые точки самопересечения и простые точки возврата.

В ситуации общего положения проекция кривой Γ в $\mathbf{C}P^n$ на кривую Γ' в $\mathbf{C}P^m$, $m < n$, представляет собой бирациональный изоморфизм, то есть если точка $(x_0, \ldots, x_n) \in \Gamma$ переходит в точку $(y_0, \ldots, y_m) \in \Gamma'$, то как $x_0, \ldots, x_n$ рационально выражаются через $y_0, \ldots, y_m$, так и $y_0, \ldots, y_m$ рационально выражаются через $x_0, \ldots, x_n$. Прежде всего заметим, что координаты можно выбрать так, чтобы проекция имела вид

$$(x_0, \ldots, x_n) \mapsto (x_0, \ldots, x_m).$$

Поэтому нужно лишь проверить, что $x_{m+1},\dots,x_n$ рационально выражаются через $x_0,\dots,x_m$ (для точек кривой Γ). Пусть кривая Γ задается системой уравнений $f_i(x_0,\dots,x_n)=0$, $i=1,\dots,r$. Для точки $(a_0,\dots,a_m)\in\Gamma$ получаем систему уравнений

$$f_i(a_0,\dots,a_m,x_{m+1},\dots,x_n)=0,\ i=1,\dots,r.$$

Каждой точке кривой Γ' соответствует одна точка кривой Γ, поэтому $x_{m+1},\dots,x_n$ однозначно выражаются через $a_0,\dots,a_m$. Следовательно, $x_{m+1}(a_0,\dots,a_m)$, $\dots$, $x_n(a_0,\dots,a_m)$ — однозначные алгебраические функции. Но алгебраическая функция однозначна лишь в том случае, когда она рациональна.

Примечание. На лекциях обсуждались также более подробно свойства кубических кривых примерно в объеме главы 1 книги В.В.Прасолов, Ю.П.Соловьев “Эллиптические функции” — НМУ, 1993.