Лекция 2. Аффинные и проективные многообразия

На прошлой лекции мы определили аффинные многообразия, теперь давайте начнем с ними работать.

Определение 2.1. Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$ — аффинные многообразия. *Морфизмом* из X в Y называется отображение $\varphi\colon X \to Y$, которое можно задать по формуле $x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, где все f_j лежат в $k[X]$.

С каждым морфизмом $\varphi\colon X \to Y$ связан действующий в обратную сторону гомоморфизм колец регулярных функций $\varphi^*\colon k[Y] \to k[X]$, действующий по формуле $f \mapsto f \circ \varphi$. На самом деле φ и φ^* полностью определяют друг друга:

Предложение 2.2. *Если X и Y — аффинные многообразия, то отображение $\varphi \mapsto \varphi^*$ задает взаимно однозначное соответствие между множеством морфизмов из X в Y и множеством k-гомоморфизмов из $k[Y]$ в $k[X]$ (гомоморфизм называется k-гомоморфизмом, если поле k, естественно вложенное в $k[X]$ и $k[Y]$, отображается тождественно).*

Доказательство. Доказательство, сводящееся к расшифровке определений, лучше провести самостоятельно. Укажем только, как строится морфизм $\varphi\colon X \to Y$ по гомоморфизму $\psi\colon k[Y] \to k[X]$. Именно, если $y_1, \ldots, y_m$ — координатные функции на $Y \subset \mathbb{A}^m$, то обозначим $\psi(y_j) = f_j \in k[X]$ и положим $\varphi = (f_1, \ldots, f_m)\colon X \to \mathbb{A}^m$. □

Заметим еще, что морфизмы из X в $\mathbb{A}^1$ — это то же самое, что регулярные функции на X.

До сих пор мы работали только с функциями, определенными на всем аффинном многообразии. Часто, однако, приходится иметь дело и с функциями, определенными не на всем многообразии, а на его открытых подмножествах. Для алгебраических многообразий эти функции, называемые *рациональными функциями,* определяются как отношения регулярных функций. Впрочем, при определении рациональных функций нужна известная аккуратность:

Определение 2.3. Пусть X — аффинное многообразие. *Рациональной функцией* на X называется выражение вида f/g, где f и g — регулярные функции на X и g не есть тождественный нуль. Рациональные функции

f/g и f_1/g_1 называются равными, если $f(x)/g(x) = f_1(x)/g_1(x)$ для всех $x \in X$, для которых обе части этого равенства имеют смысл.

Предложение 2.4. *Рациональные функции f/g и f_1/g_1 равны тогда и только тогда, когда $fg_1 = gf_1$ тождественно на X.*

Доказательство. По определению, $f/g = f_1/g_1$ тогда и только тогда, когда $fg_1 - gf_1$ обращается в нуль на дополнении к $V(gg_1) \subset X$. Если при этом $fg_1 - gf_1$ не есть тождественный нуль на X, то получится, что $X = V(gg_1) \cup V(fg_1 - gf_1)$, причем оба этих множества отличны от X. Это противоречит неприводимости X.

Другой вариант этого типичного рассуждения: так как X неприводимо, всякое открытое подмножество в нем всюду плотно; регулярная функция $fg_1 - gf_1$ обращается в нуль на плотном подмножестве $X \setminus V(gg_1)$ и непрерывна в топологии Зарисского, следовательно, она тождественно равна нулю. $\square$

Стало быть, рациональные функции на X можно отождествить с элементами поля частных кольца $k[X]$. Это поле обозначается $k(X)$ и называется, естественно, *полем рациональных функций* на X. Каждый элемент $k(X)$ можно рассматривать как функцию, определенную на подмножестве X. Уточним эти слова:

Определение 2.5. Пусть f — рациональная функция на аффинном многообразии X. Говорят, что f *определена в точке* $p \in X$ (другой термин: *регулярна в точке* $p \in X$), если f можно представить в виде g/h, где g и h лежат в $k[X]$ и $h(p) \neq 0$.

Существенно, что область определения функции $f = g/h$ может быть больше, чем дополнение к множеству нулей h. Тривиальным примером может служить функция x^2/xy на $\mathbb{A}^2$, область определения которой — дополнение к оси абсцисс, а не ко всему координатному кресту. В данном случае причина увеличения области определения банальна: можно сократить дробь и записать функцию в виде x/y, после чего с областью определения никаких неожиданностей не будет. Но на многообразиях, отличных от аффинного пространства, область определения функции g/h может быть строго больше, чем дополнение к $V(h)$, даже если g/h — несократимая дробь. Вот еще один пример. Пусть $X \subset \mathbb{A}^3$ — квадратичный конус, заданный уравнением $z^2 = xy$. Положим $f = y/z$. На многообразии X функция z обращается в нуль в точности на объединении осей Ox и Oy, так что f заведомо определена на дополнении к этому объединению. Но на самом деле область определения f шире:

так как $z^2 = xy$ на многообразии X, функцию f можно записать и в виде z/x, так что f определена еще и всюду на оси Ox, кроме начала координат.

Итак, область определения рациональной функции может быть шире, чем кажется на первый взгляд. Естественно спросить, какие рациональные функции определены вообще всюду. Таковы, разумеется, все регулярные функции; оказывается, что больше ничего и нет (и тем самым выражение «регулярная функция на X» не является двусмысленным):

Предложение 2.6. *Если X — аффинное многообразие и f — рациональная функция на X, определенная всюду, то $f \in k[X]$.*

Доказательство. Пусть рациональная функция h определена всюду на X. Тогда для каждой точки $x \in X$ существуют такие $u_x, v_x \in k[X]$, что $h = u_x/v_x$ и $v_x(x) \neq 0$. Следовательно, $\bigcap_{x\in X} V(v_x) = \varnothing$. По теореме Гильберта о нулях получаем, что все v_x порождают единичный идеал в $k[X]$. Иными словами, найдутся такие $x_1, \ldots, x_r \in X$ и $g_1, \ldots, g_r \in k[X]$, что $\sum_{i=1}^r g_i v_{x_i} = 1$. Теперь запишем тождество (в поле $k(X)$):

$$h = h \cdot 1 = \sum g_i \cdot h v_{x_i} = \sum g_i u_{x_i} \in k[X].$$

Предложение доказано. $\square$

Понятие рациональной функции позволяет дать эквивалентное определение морфизма аффинных многообразий, которое понадобится нам, когда мы будем склеивать общие многообразия из аффинных:

Предложение 2.7. *Пусть X и Y — аффинные многообразия. Отображение $\varphi\colon X \to Y$ является морфизмом тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) *φ непрерывно в топологии Зарисского;*

2) *Для всякого открытого подмножества $U \subset Y$ и рациональной функции $f \in k(Y)$, регулярной на U, функция $f \circ \varphi\colon \varphi^{-1}(U) \to k$ является рациональной функцией на X, регулярной на $\varphi^{-1}(U)$.*

Доказательство. «Тогда»: Для каждой координатной функции $y_i \in k[Y]$ функция $f_i = y_i \circ \varphi$ будет рациональной и определенной всюду на X; в силу предложения 2.6 $f_i \in k[X]$. Стало быть, $\varphi\colon X \to Y$ задается регулярными на X функциями f_i и является морфизмом.

Часть «только тогда» очевидна. $\square$

Аффинные многообразия — не единственный (и не основной) предмет изучения в алгебраической геометрии. Многие интересные и естественно возникающие алгебраические многообразия не являются аффинными, а всего лишь получаются из аффинных многообразий с помощью «склейки». В этом смысле положение аффинных многообразий в алгебраической геометрии аналогично положению пространств Штейна в теории комплексных многообразий. К сожалению, точное описание процесса склейки — вещь довольно сложная и сухая, даже при принятых в нашем курсе упрощающих предположениях. Поэтому мы сначала опишем эту склейку на примере проективных многообразий, который весьма важен и сам по себе, и лишь потом дадим точные определения.

Начнем с того, что определим (опуская предполагаемые известными мотивировки) проективное пространство. Напомним, что мы работаем над фиксированным алгебраически замкнутым полем k.

Точка n-мерного проективного пространства — это набор из $n+1$ элемента $(x_0 : \dots : x_n)$ поля k, для которого не все x_j равны нулю, причем наборы $(x_0 : \dots : x_n)$ и $(x'_0 : \dots : x'_n)$ задают одну и ту же точку тогда и только тогда, когда $x'_j = \lambda x_j$ для некоторого $\lambda \in k \setminus \{0\}$ и для всех $j \in [0; n]$. n-мерное проективное пространство обозначается $\mathbb{P}^n$. Любой из наборов $(x_0 : \dots : x_n)$, задающих точку $p \in \mathbb{P}^n$, называется *однородными координатами* точки p. Однородные координаты определены с точностью до пропорциональности; при записи однородных координат их принято отделять не запятыми, а двоеточиями (как вы, наверное, уже успели заметить).

Теперь определим на $\mathbb{P}^n$ топологию Зарисского. В проективном пространстве замкнутые множества тоже задаются полиномиальными уравнениями, но формулировка точных определений требует осторожности: многочлены не является функциями на $\mathbb{P}^n$, поскольку значение $f(x_0, \dots, x_n)$, где $(x_0 : \dots : x_n)$ — однородные координаты точки $p \in \mathbb{P}^n$, зависит от выбора этих координат. Тем не менее, если f — *однородный* многочлен от $X_0, \dots, X_n$, то независимо от выбора однородных координат можно сказать, обращается ли он в нуль в данной точке $p \in \mathbb{P}^n$.

Определение 2.8. Подмножество $V \subset \mathbb{P}^n$ называется *замкнутым по Зарисскому,* если V — множество нулей семейства однородных многочленов $F_\alpha \in k[X_0, \dots, X_n]$ с коэффициентами из k. Дополнение к замкнутому по Зарисскому множеству называется открытым по Зарисскому.

Как и в случае аффинного пространства, проверяется, что в определении замкнутого множества можно ограничиться конечными семействами (однородных) многочленов, а также что открытые по Зарисскому множества задают на $\mathbb{P}^n$ топологию (называемую, разумеется, топологией Зарисского).

Опять-таки, как и в случае аффинного пространства, имеется соответствие между замкнутыми подмножествами $\mathbb{P}^n$ и идеалами в $k[X_0, \dots, X_n]$, однако и здесь проективное пространство накладывает свою специфику. Именно, пусть для начала $I \subset k[X_0, \dots, X_n]$ — идеал. Говорят, что идеал I *однороден,* если для каждого $f \in I$ все однородные компоненты f также лежат в I. Легко проверить, что идеал в кольце многочленов однороден тогда и только тогда, когда он может быть порожден семейством однородных многочленов. Докажите самостоятельно, что радикал однородного идеала однороден, а также что однородный идеал $\mathfrak{p}$ прост, если из включения $FG \in \mathfrak{p}$, где F и G — *однородные* многочлены, следует, что F или G лежит в $\mathfrak{p}$ (доказательства обоих фактов просты, но не тавтологичны).

Пусть теперь $M \subset \mathbb{P}^n$ — любое подмножество. Через $I(M) \subset k[X_0, \dots, X_n]$ обозначим идеал, порожденный всеми *однородными* многочленами, обращающимися в нуль на M. По-другому идеал $I(M)$ можно описать так. С каждым подмножеством $M \subset \mathbb{P}^n$ свяжем *аффинный конус* над ним: множество $\hat{M} \subset \mathbb{A}^{n+1}$ состоящее из начала координат и всевозможных точек $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^{n+1}$ таких, что $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ — однородные координаты какой-то точки из M (для каждой точки берутся все возможные записи ее однородных координат). Так вот, нетрудно проверить (сделайте это самостоятельно), что $I(M)$ — множество многочленов, обращающихся в нуль на $\hat{M}$. С другой стороны, для всякого однородного идеала $I \subset k[X_0, \dots, X_n]$ обозначим через $V(I) \subset \mathbb{P}^n$ множество точек, в которых обращаются в нуль все однородные элементы I. Связь между идеалами и замкнутыми множествами для случая проективного пространства модифицируется так:

Предложение 2.9. *Обозначим $R = k[X_0, \dots, X_n]$, и пусть $J = (X_0, \dots, X_n) \subset R$. Тогда для каждого однородного идеала $I \subset R$ и для каждого подмножества $M \subset \mathbb{P}^n$ имеем:*

а) $V(I) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $I \supset J^r$ для некоторого $r > 0$;

б) если $V(I) \neq \varnothing$, то $I(V(I)) = r(I)$;

в) $V(I(M)) = \overline{M}$;

г) Соответствия $V \mapsto I(V)$ и $I \mapsto V(I)$ задают обращающее включения взаимно однозначное соответствие между множе-

ством замкнутых по Зарисскому подмножеств $\mathbb{P}^n$ и множеством однородных идеалов кольца R, совпадающих со своим радикалом и отличных от J.

Доказательство. Мы докажем только нетривиальную часть пункта (a), предоставив остальное слушателям. Итак, пусть $V(I) = \varnothing$, где I — однородный идеал. Если I совпадает со всем R, то доказывать нечего; в противном случае множество общих нулей многочленов из I в $\mathbb{A}^{n+1}$ должно совпадать с началом координат (так как идеал однородный и неединичный, то начало координат в этом множестве есть заведомо; если бы было что-то еще, то это «что-то» дало бы точку в $\mathbb{P}^n$). По теореме Гильберта о нулях отсюда следует, что $r(I)$ совпадает с идеалом, соответствующим началу координат в $\mathbb{A}^{n+1}$, то есть с J. Легко видеть что $r(I) = J$ тогда и только тогда, когда $J^r \subset I$ для некоторого $r > 0$. $\square$

Каждое замкнутое подмножество проективного пространства единственным образом разлагается в объединение конечного числа неприводимых компонент — для доказательства достаточно повторить слово в слово рассуждения для случая аффинного пространства. А теперь — важнейшее определение.

Определение 2.10. *Проективным алгебраическим многообразием* называется неприводимое замкнутое по Зарисскому подмножество проективного пространства $\mathbb{P}^n$.

Теперь определим рациональные функции на проективном многообразии. Ввиду неоднозначности выбора однородных координат точки, многочлены на роль таких функций не годятся. Чтобы значение функции в точке не зависело от выбора однородных координат, надо в качестве этой функции брать отношение однородных многочленов одной степени:

Определение 2.11. *Рациональной функцией* на проективном многообразии $V \subset \mathbb{P}^n$ называется выражение вида F/G, где F и G — однородные многочлены от $X_0, \dots, X_n$ одной степени и G не есть тождественный нуль на V. Рациональные функции F/G и F_1/G_1 называются равными, если

$$F(x_0, \dots, x_n)/G(x_0, \dots, x_n) = F_1(x_0, \dots, x_n)/G_1(x_0, \dots, x_n)$$

для всех точек $p = (x_0 : \dots : x_n) \in V$, для которых обе части этого равенства имеют смысл. Рациональная функция h называется *определенной,* или *регулярной* в точке $p \in V$, если h можно представить в виде F/G, где G не обращается в нуль в p.

Так же, как и для случая аффинных многообразий, проверяется, что $F/G = F_1/G_1$ тогда и только тогда, когда $FG_1 - GF_1$ есть тождественный нуль на V.

Теперь опишем взаимосвязь между проективными и аффинными многообразиями. Для каждого $i \in [0; n]$ положим

$$\mathbb{A}^n_i = \{ \, p = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0 \, \}.$$

Поскольку у точек $\mathbb{A}^n_i$ однородная координата x_i отлична от нуля, отображение $(x_0 : \dots : x_n) \mapsto (x_0/x_i, \dots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \dots, x_n/x_i)$ устанавливает естественное взаимно-однозначное соответствие между $\mathbb{A}^n_i$ и знакомым нам n-мерным аффинным пространством. Очевидно, каждое $\mathbb{A}^n_i$ открыто в $\mathbb{P}^n$ и $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^n \mathbb{A}^n_i$.

Предложение 2.12. *Отождествим каждое из $\mathbb{A}^n_i$ с n-мерным аффинным пространством способом, указанным выше. Тогда топология Зарисского на $\mathbb{P}^n$ индуцирует топологию Зарисского, определенную нами ранее для аффинного пространства, на каждом из $\mathbb{A}^n_i$.*

Доказательство. Положим для определенности $i = 0$. Для каждого многочлена $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ степени d, представленного в виде $f = \sum_{j=0}^d f_j$, где все f_j однородны и $\deg f_j = j$, положим ${}^h f = \sum_{j=0}^d X_0^{d-j} f_j$ (это однородный многочлен от $X_0, X_1, \dots, X_n$); для всякого однородного многочлена $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ обозначим через ${}^a F$ многочлен, полученный подстановкой 1 вместо X_0. Очевидно,

$$V(F) \cap \mathbb{A}^n_0 = V({}^a F) \qquad\qquad V({}^h f) \cap \mathbb{A}^n_0 = V(f) \tag{2.1}$$

(в левых частях этих равенств сто́ит V в смысле этой лекции, в правых — в смысле предыдущей). Так как замкнутые по Зарисскому множества суть пересечения множеств вида $V(F)$, из (2.1) все следует. $\square$

Замечание 2.13. Доказательства убаюкивающе просты, поэтому — предостережение. Если $X = V(f_1, \dots, f_r) \subset \mathbb{A}^n_0$, то, вообще говоря, *неверно,* что $\overline{X} = V({}^h f_1, \dots, {}^h f_r) \subset \mathbb{P}^n$. Пусть, например X — геометрическое место точек вида (t, t^2, t^3) в $\mathbb{A}^3_0$. Тогда $X = V(x_2 - x_1^2, x_3 - x_1^3)$, но при этом $V(x_0 x_2 - x_1^2, x_0^2 x_3 - x_1^3) \subset \mathbb{P}^3$ содержит целую прямую $\{ \, (0 : 0 : u : v) \, \}$

и строго больше, чем $\overline{X}$. Выясните самостоятельно, чему равно $\overline{X} \setminus X$ и какими уравнениями можно задать $\overline{X} \subset \mathbb{P}^3$. Кривую $\overline{X}$ по-русски называют «нормальная рациональная кривая степени 3», по-английски twisted cubic, а по-французски cubique gauche.

Пусть теперь $V \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие. Из доказанного предложения следует, что $V \cap \mathbb{A}^n_i$ — замкнутое неприводимое подмножество в $\mathbb{A}^n_i$; стало быть, мы можем рассматривать его как аффинное многообразие. Вот в чем выражается то обстоятельство, что V склеено из аффинных многообразий $V \cap \mathbb{A}^n_i$:

Предложение 2.14. *Топология Зарисского на V индуцирует топологию Зарисского на каждом из $V \cap \mathbb{A}^n_i$, рассматриваемом как аффинное многообразие; если $U \subset V$ — открытое множество, то функция $f\colon U \to k$ регулярна на U (как рациональная функция на V) тогда и только тогда, когда для всех i ограничение f на $U \cap \mathbb{A}^n_i$ регулярно на $U \cap \mathbb{A}^n_i$ как рациональная функция на аффинном многообразии $V \cap \mathbb{A}^n_i$.*

Доказательство. Всякая рациональная функция f/g на аффинном многообразии $V \cap \mathbb{A}^n_i$ является ограничением рациональной на V как на проективном многообразии функции ${}^h f/({}^h g \cdot X_i^{\deg f - \deg g})$. Это доказывает часть «только тогда» утверждения про функции. Остальное докажите самостоятельно. $\square$

Следствие 2.15. *Всякая функция, регулярная на всем $\mathbb{P}^n$, является константой.*

Доказательство. Пусть f регулярна на $\mathbb{P}^n$. Тогда $f|_{\mathbb{A}^n_i} = F_i/x_i^{d_i}$, где F_i — однородный многочлен степени d_i. Домножая на подходящие степени x_i, можно добиться того, чтобы все d_i были равны числу d. Так как все F_i/x_i^d при ограничении на $\bigcap \mathbb{A}^n_i$ дают одну и ту же функцию, то $x_i^d F_j = x_j^d F_i$. Следовательно, F_j делится на x_j^d для всех j, так что все F_j/x_j^d суть константы, и такова же функция f. $\square$

Замечание 2.16. Если $k = \mathbb{C}$, то это утверждение очевидно, так как $\mathbb{P}^n$ тогда — компактное комплексное многообразие, а f — глобальная голоморфная функция на нем. Наше предложение остается верным (в общем случае), если заменить $\mathbb{P}^n$ на любое проективное многообразие. Мы докажем это позже, в качестве следствия свойства полноты проективного пространства, являющегося алгебро-геометрическим аналогом компактности.