Лекция 3. Многообразия и морфизмы

На прошлой лекции мы познакомились с тем, как проективное многообразие склеено из аффинных. Теперь рассмотрим процесс склейки в общем виде. В алгебраической геометрии принято (по традиции, идущей от французской школы, а также — во-вторых и в главных — потому, что это технически удобнее) описывать склейку не в терминах локальных координат и функций перехода, а через кольца функций на открытых подмножествах. Вот как это делается.

Определение 3.1. *Пространством с пучком функций* (дальше будем говорить просто «пространство с пучком», поскольку других пучков нам в ближайшее время не встретится) называется топологическое пространство X со следующей дополнительной структурой: для каждого непустого открытого подмножества $U \subset X$ задано множество $k[U]$ функций на U со значениями в основном поле k, называемых регулярными функциями. При этом требуется, чтобы выполнялись следующие аксиомы:

1) Каждое из множеств $k[U]$ является кольцом (относительно поточечного сложения и умножения функций) и содержит все постоянные функции.

2) Если $U \subset V \subset X$ — открытые множества и $f \in k[V]$, то $f|_U \in k[U]$ (черта означает ограничение).

3) Пусть открытое множество $U \subset X$ является объединением своих открытых подмножеств U_i. Если функция $f \colon U \to k$ такова, что $f|_{U_i} \in k[U_i]$ для всех i, то $f \in k[U]$.

Приведем примеры пространств с пучком. Если X — произвольное топологическое пространство (вариант: гладкое многообразие; еще вариант: комплексное многообразие) и $k = \mathbb{C}$, то структуру пространства с пучком на X можно получить, объявив, что $k[U]$ состоит из всех непрерывных (соответственно: гладких; голоморфных) функций из U в $\mathbb{C}$. Более важны для нас следующие два примера: всякое аффинное многообразие станет пространством с пучком, если в качестве топологии выбрать топологию Зарисского, а слова «функции, регулярные на U» понимать как в предыдущей лекции; точно в тех же словах описывается, как превратить в пространство с пучком любое проективное многообразие. Легко видеть, что во всех указанных примерах аксиомы (1)–(3) выполнены.

Теперь определим морфизмы пространств с пучком.

Определение 3.2. Пусть X и Y — пространства с пучком. *Морфизмом* из X в Y называется непрерывное отображение $\varphi\colon X \to Y$, обладающее следующим свойством: если $U \subset Y$ — открытое подмножество и $f \in k[U]$, то $f \circ \varphi \in k[\varphi^{-1}(U)]$.

Приведем примеры. Если X и Y — топологические пространства (соответственно: гладкие многообразия, комплексные многообразия), рассматриваемые как пространства с пучком, и $\varphi\colon X \to Y$ — непрерывное отображение (соответственно: гладкое отображение; голоморфное отображение), то φ является и морфизмом пространств с пучком. Обратно, если в этой ситуации $\varphi\colon X \to Y$ — морфизм пространств с пучком, то φ — непрерывное (соответственно гладкое, голоморфное) отображение: проверьте это самостоятельно. Наконец, описание морфизмов аффинных многообразий, данное на прошлой лекции, показывает, что для аффинных многообразий X и Y отображение $\varphi\colon X \to Y$ будет морфизмом аффинных многообразий тогда и только тогда, когда φ — морфизм пространств с пучком.

Если X — пространство с пучком и $U \subset X$ — открытое подмножество, то U также можно рассматривать как пространство с пучком (с теми же самыми регулярными функциями). Имея в виду это замечание, дадим основное

Определение 3.3. *Алгебраическим многообразием* (над алгебраически замкнутым полем k) называется пространство с пучком X, удовлетворяющее следующим условиям:

1) X неприводимо;

2) X является объединением конечного числа открытых подмножеств, каждое из которых изоморфно (как пространство с пучком) некоторому аффинному многообразию.

Морфизмом алгебраических многообразий называется морфизм соответствующих пространств с пучком.

Всякое аффинное многообразие по тривиальной причине является алгебраическим многообразием. Алгебраическое многообразие, изоморфное какому-нибудь аффинному многообразию, также называется аффинным. По доказанному в конце прошлой лекции (предложение 2.14) всякое проективное многообразие также является алгебраическим многообразием.

Сейчас мы докажем технический результат, показывающий, что при рассмотрении локальных вопросов можно ограничиться работой с аффинными многообразиями. Сначала небольшая подготовка. Если X — аффинное многообразие, $f \in k[X]$, то положим $D(f) = X \setminus V(f)$. Так как каждое замкнутое подмножество X является пересечением подмножеств вида $V(f)$, то всякое открытое подмножество является объединением множеств вида $D(f)$ (иными словами, множества $D(f)$ образуют базу топологии Зарисского).

Предложение 3.4. *Пусть X — аффинное многообразие, $f \in k[X]$. Тогда $D(f)$ изоморфно как пространство с пучком некоторому аффинному многообразию.*

Доказательство. Пусть X реализовано как замкнутое подмножество в $\mathbb{A}^n$. Рассмотрим множество

$$X' = \{\, (x,t) \in X \times \mathbb{A}^1 \subset \mathbb{A}^{n+1} \mid tf(x) = 1 \,\}.$$

Без труда проверяется, что отображения $\pi\colon (x,t) \mapsto x$ и $\varphi\colon x \mapsto (x, 1/f(x))$ являются взаимно обратными биекциями множеств X' и $D(f)$, что эти отображения непрерывны в топологии Зарисского, и что π^* и φ^* переводят рациональные функции на $D(f)$ и X' друг в друга, что и составляет содержание нашего предложения. □

Следствие 3.5. *Пусть X — аффинное многообразие, $f \in k[X]$. Рациональная функция $h \in k(X)$ регулярна на $D(f)$ тогда и только тогда, когда $h = a/f^m$ для некоторых $a \in k[X]$ и $m \geqslant 0$.*

Доказательство. Воспользуемся обозначениями из предыдущего доказательства. Ввиду изоморфизма $D(f)$ и X', имеем $k[D(f)] = \varphi^* k[X']$. Так как $k[X'] \cong k[X][T]/(fT-1)$ и $\varphi^*(T) = 1/f$, получаем, что $k[D(f)] = k[X][1/f]$; кольцо в правой части этого равенства состоит из элементов вида a/f^m, где $a \in k[X]$. □

Доказанное предложение показывает, что у каждого алгебраического многообразия открытые подмножества, изоморфные аффинным многообразиям, составляют базу топологии. Отсюда же следует и то, что всякое открытое подмножество алгебраического многообразия обладает естественной структурой алгебраического многообразия Открытые подмножества, изоморфные аффинным многообразиям, называются *аффинными открытыми множествами.*

Давайте теперь займемся морфизмами алгебраических многообразий. Морфизмы произвольных многообразий в аффинные устроены просто:

Предложение 3.6. *Пусть X — алгебраическое многообразие, $Y \subset \mathbb{A}^m$ — аффинное многообразие. Всякий морфизм является отображением $\varphi\colon X \to Y$, которое можно задать по формуле $x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, где все f_j лежат в $k[X]$; обратно, всякое отображение такого видя задает морфизм из X в Y.*

Доказательство. Если $\varphi\colon X \to Y$ — морфизм, $y_i \in k[Y]$ — координатные функции, то, полагая $y_i \circ \varphi = f_i \in k[X]$, получаем первое утверждение.

Обратно, пусть $\varphi\colon x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, где все f_j лежат в $k[X]$, — отображение их X в Y. Чтобы убедиться, что это морфизм, надо проверить две вещи:

1) $\varphi^{-1}(V(h)) \subset X$ замкнуто в топологии Зарисского для всякой $h \in k[Y]$;

2) если h и g — регулярные функции на Y, $x \in X$, $y = \varphi(x)$, и $g(y) \neq 0$, то функция $u = h \circ \varphi / g \circ \varphi$ лежит в $k[X \setminus V(g \circ \varphi)]$.

Для доказательства первого утверждения заметим, что $\varphi^{-1}(V(h))$ — множество нулей регулярной на всем X функции $h \circ \varphi$; чтобы удостовериться в его замкнутости, достаточно проверить, что замкнуты (в индуцированной топологии) его пересечения со всеми аффинными открытыми множествами, а это составляет содержание нашего самого первого определения.

Для доказательства того, что $u = h \circ \varphi / g \circ \varphi$ — регулярная функция на $X \setminus V(g)$, опять же достаточно (в силу аксиомы (3) пространств с пучком!) проверить, что для всякого аффинного открытого множества $U \subset X$ ограничение $u|_{U \setminus V(g)}$ является рациональной функцией на аффинном многообразии U, регулярной вне множества нулей $g|_U$. Это очевидно из определения рациональных функций. □

Теперь приведем типичный пример морфизма в проективное многообразие — линейную проекцию.

Пусть $\mathbb{P}^n$ — проективное пространство и $L \subset \mathbb{P}^n$ — линейное подпространство, $\dim L = d$. $d+1$-мерные линейные подпространства в $\mathbb{P}^n$, содержащие L, образуют $n-d-1$-мерное проективное пространство. Будем обозначать это пространство попросту $\mathbb{P}^{n-d-1}$. По определению, *проекция с центром в* L — это отображение $\pi_L\colon \mathbb{P}^n \setminus L \to$

$\mathbb{P}^{n-d-1}$, переводящее точку p в линейное пространство, порожденное L и p. Если $L \subset \mathbb{P}^n$ задается линейными уравнениями $l_1(x_0, \ldots, x_n) = 0, \ldots, l_{n-d}(x_0, \ldots, x_n) = 0$ (здесь l_j — однородные формы от однородных координат в $\mathbb{P}^n$), то отображение π_L можно задать формулой

$$(x_0 : \cdots : x_n) \mapsto (l_1(x_0, \ldots, x_n) : \cdots : l_{n-d}(x_0, \ldots, x_n)).$$

Ясно, что это действительно морфизм: на открытом множестве $\mathbb{P}^n \setminus V(l_j)$ имеем

$$\pi_L(x_0, \ldots, x_n) = (l_1/l_j, \ldots, l_{j-1}/l_j, l_{j+1}/l_j, \ldots, l_{n-d}/l_j) \in \mathbb{A}_j^{n-d-1}.$$

Стало быть, для каждого $j \in [1; n-d]$ ограничение $\pi_l|_{\mathbb{P}^n \setminus V(l_j)}$ является морфизмом в $\mathbb{A}_j^{n-d-1} \subset \mathbb{P}^{n-d-1}$; из определения морфизма пространств с пучком ясно, что и само π_L является морфизмом.

Если $V \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие, то, естественно, π_l можно рассматривать и как морфизм из $V \setminus L$ в $\mathbb{P}^{n-d-1}$.

В нашем примере проекция является морфизмом, который может быть определен не на всем многообразии, а только вне его пересечения с центром проекции. Такие не всюду определенные морфизмы встречаются в алгебраической геометрии очень часто. Обсудим их.

Начнем с того, что сформулируем в общем виде понятие рациональной функции на алгебраическом многообразии.

Определение 3.7. Рациональной функцией на алгебраическом многообразии X называется класс эквивалентности пар (f, U), где $U \subset X$ — открытое подмножество и $f \in k[U]$, относительно следующего отношения эквивалентности: $(f, U) \sim (g, V)$, если ограничения f и g на $U \cap V$ совпадают.

Очевидно, что для аффинного или проективного многообразия X понятия рациональной функции на X в старом и новом смысле совпадают.

Множество рациональных функций на многообразии X является, очевидно, полем; это поле называется полем рациональных функций на X и обозначается $k(X)$, как и в случае аффинных многообразий. Из определений ясно, что поле $k(X)$ не меняется при замене многообразия X на любое его открытое подмножество.

Теперь определим рациональные отображения.

Определение 3.8. Пусть X и Y — алгебраические многообразия. *Рациональным отображением* из X в Y называется класс эквивалентности пар (φ, U), где $U \subset X$ открыто и $\varphi\colon U \to Y$ — морфизм, относительно следующего отношения эквивалентности: $(\varphi, U) \sim (\psi, V)$ если ограничения φ и ψ на $U \cap V$ совпадают. Объединение всех U по всем (φ, U) из этого класса эквивалентности называется *областью определения* рационального отображения.

Рациональные отображения, чтобы отличить их от морфизмов, обычно обозначают пунктирными стрелками. Например, если $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие, $L \subset \mathbb{P}^n$ — линейное подпространство размерности d, не содержащее X, то $\pi_L \colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-d-1}$ — рациональное отображение.

Область определения рационального отображения может оказаться шире, чем кажется на первый взгляд. Мы уже сталкивались с увеличением области определения рациональных функций, то есть рациональных отображений в $\mathbb{A}^1$. Вот пример, как может расшириться область определения рационального отображения в *проективное* многообразие.

Пример 3.9. Пусть F — неприводимый однородный многочлен от x и y. Множество $X = V(F) \subset \mathbb{A}^2$ называется *плоской аффинной кривой.* Для всякой точки $p \in \mathbb{A}^2$ с координатами $(a; b)$ проекция $\pi_p \colon \mathbb{A}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ задается формулой $(x; y) \mapsto (x - a : y - b)$. Если $p \in X$, то $\pi_p|_X$ — рациональное отображение, и в общем случае ничего больше сказать о нем нельзя. Пусть, однако, точка *p неособа* на X. Общее определение неособости мы дадим позднее, а пока просто скажем, что точка p неособа на кривой $F(x, y) = 0$, если хотя бы одна из частных производных F'_x и F'_y отлична в точке p от нуля. Так вот:

> Если кривая X неособа в точке $p \in X$, то проекция $\pi_p \colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ определена на всей X (и тем самым является морфизмом).

В самом деле, пусть $F'_x(a, b) = l$, $F'_y(a, b) = m$, и предположим для определенности, что $l \neq 0$. Тогда имеем, очевидно, тождество

$$F(x, y) = l(x - a) + m(y - b) + (x - a)G(x, y) + (y - b)H(x, y),$$

где $G(a, b) = H(a, b) = 0$. Стало быть, в поле $k(X)$ имеем $\dfrac{x - a}{y - b} = \dfrac{-m - H}{l + G}$, и правая часть определена в точке p, так как знаменатель в точке p равен $l \neq 0$. Так как $(x - a : y - b) = (\dfrac{x - a}{y - b} : 1)$, в окрестности точки $p \in X$ рациональное отображение π_p совпадает с морфизмом $(x; y) \mapsto (\dfrac{-m - H}{l + G} : 1) \in \mathbb{A}^1_1 \subset \mathbb{P}^1$, а это и означает, что π_p определено и в точке p. Когда мы дадим общие определения, мы увидим, что всякое рациональное отображение неособой кривой в проективное многообразие продолжается до морфизма.

Подобно тому, как морфизмы аффинных многообразий полностью характеризуются индуцированными гомоморфизмами колец регулярных функций, рациональные отображения *любых* многообразий почти характеризуются индуцированными гомоморфизмами (то есть, вложениями) полей рациональных функций. Оговорка вызвана тем, что рациональное отображение может быть не всюду определено.

Определение 3.10. Рациональное отображение $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ называется *доминантным,* если образ какого-то (следовательно, и любого) открытого подмножества, на котором φ определено, всюду плотен в X.

Смысл этого определения в том, что композицию рациональных отображений $\psi \circ \varphi$ можно определить не всегда, а лишь тогда, когда замыкание образа φ пересекается с областью определения ψ. Если же φ доминантно, то композиция $\psi \circ \varphi$ заведомо существует, что вытекает из следующего (важного и сам по себе) факта:

Предложение 3.11. *Если $\varphi\colon X \to Y$ — доминантный морфизм, то $\varphi(X)$ содержит подмножество, открытое по Зарисскому в Y.*

Доказательство. Заменяя X и Y на подходящие открытые аффинные подмножества, получаем, что все сводится к случаю, когда $X \subset \mathbb{A}^m$ и $Y \subset \mathbb{A}^n$ — аффинные многообразия. Пусть $\varphi = (f_1, \ldots, f_n)$, где $f_j \in k[X]$. Точка $(y_1, \ldots, y_n)$ лежит в $f(X)$, если и только если имеет решения в k система уравнений

$$\begin{gathered} f_1(x_1, \ldots, x_m) - y_1 = \cdots = f_n(x_1, \ldots, x_m) - y_n = 0 \\ h_1(x_1, \ldots, x_m) = \cdots = h_r(x_1, \ldots, x_m) = 0 \end{gathered} \tag{3.1}$$

(здесь h_j — уравнения X в $\mathbb{A}^m$). Рассмотрим (3.1) как систему уравнений от $x_1, \ldots, x_m$ над полем $L = k(Y)$. Возможны два случая.

1) Левые части этих уравнений порождают единичный идеал в кольце $L[X_1, \ldots, X_m]$, то есть сумма этих левых частей, помноженных на какие-то многочлены $u_\alpha \in L[X_1, \ldots, X_m]$, тождественно равна 1. Обозначим через $U \subset Y$ открытое подмножество в Y, на котором определены рациональные функции-коэффициенты многочленов u_α. Тогда точки $(y_1, \ldots, y_n) \in U$, координаты которых можно подставить в u_α, заведомо не лежат в $\varphi(X)$. Это противоречит доминантности φ, так что этот случай невозможен.

2) Левые части уравнений (3.1) не порождают единичного идеала. В таком случае эта система уравнений имеет решение в некотором конечном расширении L (это доказывается точно так же, как мы доказывали

первую часть теоремы Гильберта о нулях). Пусть $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ — это решение. Тогда ξ_j фактически дают формулы для прообразов точек из U! Точнее говоря, пусть минимальное уравнение ξ_1 над L имеет вид

$$\xi_1^{d_1} + a_{11}(y_1, \dots, y_n)\xi_1^{d_1-1} + \dots + a_{d_1,1}(y_1, \dots, y_n) = 0$$

(все a_{pq} — рациональные функции на Y). Если $U_1 \subset Y$ — открытое множество, на котором определены все a_{1j}, и $y = (y_1, \dots, y_n) \in U_1$, то подставим в это уравнение для ξ_1 значения $(y_1, \dots, y_n)$ и, рассматривая его как уравнения над k, найдем какой-нибудь его корень x_1. Пусть теперь минимальное уравнение ξ_2 над $L(\xi_1)$ имеет вид

$$\xi_2^{d_2} + a_{12}(y_1, \dots, y_n)\xi_j^{d_2-1} + \dots + a_{d_2,2}(y_1, \dots, y_n) = 0,$$

где все $a_{ij} \in L[\xi_1] = L(\xi_1)$. Если U_2 — открытое подмножество, на котором определены рациональные функции, являющиеся коэффициентами всех $a_{2,j}$, и если $y = (y_1, \dots, y_n) \in U_1 \cap U_2$, то подставим в это уравнение для ξ_2 значения $(y_1, \dots, y_n) \in U$, а также найденное на предыдущем шаге значение x_1 вместо ξ_1. Продолжая этот процесс, найдем для каждой $y \in U_1 \cap \dots \cap U_n$ точку $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n$ (заметим, что подмножества U_i зависят только от ξ_i, но не от выбора $y \in Y$). Ясно, что $(x_1, \dots, x_m)$ удовлетворяет системе уравнений (3.1); это и означает, что $x \in X$ и $\varphi(x) = y$. $\square$

Замечание 3.12. Образ морфизма алгебраических многообразий не обязан быть ни открытым, ни замкнутым подмножеством. Пример тому — морфизм $\mathbb{A}^2$ в себя, заданный формулой $(x, y) \mapsto (x, xy)$.

Если бы мы рассматривали не только неприводимые многообразия над алгебраически замкнутыми полями, то многообразие над $k(Y)$, заданное уравнениями (3.1), называлось бы общим слоем морфизма φ.

После этих приготовлений вернемся к связи рациональных отображений с вложениями полей.

Предложение 3.13. *Пусть X и Y — алгебраические многообразия, $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ — доминантное рациональное отображение. Тогда соответствие $f \mapsto \varphi^* f = f \circ \varphi$ является корректно определенным вложением $k(Y)$ в $k(X)$. Соответствие $\varphi \mapsto \varphi^*$ задает взаимно однозначное соответствие между множеством доминантных рациональных отображений из X в Y и множеством вложений $k(Y)$ в $k(X)$, оставляющих k на месте.*

Доказательство получается повтором соответствующего рассуждения для морфизмов аффинных многообразий. Единственный нетривиальный момент — это что φ^* всегда определено, но это следует из предложения 3.11.

Если доминантное рациональное отображение $\varphi\colon X \dashrightarrow Y$ имеет обратное, то есть такое отображение $\psi\colon Y \dashrightarrow X$, что $\psi\circ\varphi$ и $\varphi\circ\psi$ эквивалентны тождественным отображениям (в смысле эквивалентности из определения 3.8), то это отображение называется *бирациональным изоморфизмом,* а многообразия X и Y — *бирационально изоморфными.* Из всего сказанного вытекает такое

Предложение 3.14. *Пусть X и Y — алгебраические многообразия. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

1) *X и Y бирационально изоморфны;*

2) *поля $k(X)$ и $k(Y)$ изоморфны как расширения k;*

3) *существуют изоморфные друг другу открытые подмножества $U \subset X$ и $V \subset Y$.*

Еще одно терминологическое замечание: многообразие называется *рациональным,* если оно бирационально изоморфно $\mathbb{P}^n$ (или, что одно и то же, $\mathbb{A}^n$).

Докажем в заключение один общий результат о бирациональных изоморфизмах. Напомним, что *гиперповерхностью* в $\mathbb{A}^n$ (соответственно, $\mathbb{P}^n$) называется множество нулей неприводимого многочлена (соответственно, однородного многочлена).

Предложение 3.15. *Всякое алгебраическое многообразие бирационально изоморфно гиперповерхности.*

Доказательство. Можно считать, что $X \subset \mathbb{A}^n$ аффинно; тогда $k(X) = k(x_1, \ldots, x_n)$. Среди $x_1, \ldots, x_n$ можно выбрать базис трансцендентности $k(X)$ над k. Стало быть, сменив нумерацию, если это необходимо, можно считать, что $x_1, \ldots, x_d$, где $d \leq n$, алгебраически независимы над k и при этом $k(X)$ — конечное расширение поля $k(x_1, \ldots, x_d)$. Более того, если характеристика конечна, то можно отобрать базис трансцендентности так, чтобы $k(X)$ было еще и сепарабельно над $k(x_1, \ldots, x_d)$ (простое доказательство этого факта, в котором используется только то, что в k из всякого элемента можно извлечь корень p-ой степени, легко придумать самому). Стало быть, по теореме о примитивном элементе, существует такой $x \in k(X)$, что $k(X) = k(x_1, \ldots, x_d, x)$.

Пусть f — многочлен минимальной степени от $x_1, \dots, x_d, x$ такой, что $f(x_1, \dots, x_d, x) = 0$. Тогда, очевидно, f неприводим и задает гиперповерхность $X' = V(f) \subset \mathbb{A}^{d+1}$, причем $k(X') \cong k(X)$. Собственно говоря, на этом доказательство закончено; если, однако, не просто сослаться на теорему о примитивном элементе, а вспомнить, как она доказывается, то можно получить дополнительную геометрическую информацию. Сделаем это.

Именно, пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ — всевозможные вложения $k(X)$ в алгебраическое замыкание $k(x_1, \dots, x_d)$ над $k(x_1, \dots, x_d)$. Так как расширение сепарабельно, элемент $x \in k(X)$ годится в качестве образующей, если все $\sigma_j(x)$ различны. Будем искать x в виде $\sum_{i=d+1}^{n} c_i x_i$, где $c_j \in k$. Ясно, что это условие выполнено для почти всякого (в смысле топологии Зарисского) набора $(c_{d+1}, \dots, c_n) \in \mathbb{A}^{n-d}$. Следовательно, если считать, что $X \subset \mathbb{A}^n$ аффинно и x_j — координатные функции, то бирациональный изоморфизм X на гиперповерхность индуцирован проекцией, действующей по формуле

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \Big(x_1, \dots, x_d, \sum_{i=d+1}^{n} c_i x_i\Big).$$

Итак, мы доказали предложение, а заодно и

Следствие 3.16. *Если $X \subset \mathbb{A}^n$ (или $X \subset \mathbb{P}^n$) — аффинное (соответственно, проективное) многообразие, то существует проекция из $\mathbb{A}^n$ в $\mathbb{A}^r$ (соответственно, из $\mathbb{P}^n$ в $\mathbb{P}^r$), индуцирующая бирациональный изоморфизм X с гиперповерхностью в $\mathbb{A}^r$ (соответственно, $\mathbb{P}^r$).*

□