Лекция 4. Произведения многообразий

Начнем с того, что докажем существование произведения аффинных многообразий. Итак, пусть $X \subset \mathbb{A}^m$ и $Y \subset \mathbb{A}^n$ — аффинные многообразия, реализованные как замкнутые подмножества аффинных пространств. Их произведением будет множество $X \times Y \subset \mathbb{A}^{m+n}$; впрочем, чтобы называть его многообразием, надо быть уверенным, что оно неприводимо:

Предложение 4.1. *Если $X \subset \mathbb{A}^m$ и $Y \subset \mathbb{A}^n$ — неприводимые замкнутые множества, то множество $X \times Y \subset \mathbb{A}^{m+n}$ также замкнуто и неприводимо.*

Доказательство. Замкнутость множества $X \times Y$ очевидна; пусть $X \times Y = V_1 \cup V_2$, где V_1 и V_2 замкнуты. Для каждого $y \in Y$ и $i \in \{1, 2\}$ множество $\{\, x \in X \mid (x, y) \in V_i \,\}$ очевидным образом замкнуто, значит, множество $W_i = \{\, x \in X \mid \{x\} \times Y \subset V_i \,\}$ замкнуто как пересечение замкнутых. Ввиду неприводимости Y имеем $X = W_1 \cup W_2$, и так как X тоже неприводимо, то X равно W_1 или W_2, откуда $X \times Y$ равно V_1 или V_2, что и требовалось. □

Итак, произведение аффинных многообразий определено; из описания морфизмов в аффинные многообразия (предложение 3.6) очевидно, что оно действительно является произведением в категорном смысле. Нелишне заметить, что топология Зарисского на $X \times Y$ отличается от произведения топологий Зарисского на X и Y.

Теперь построим произведение произвольных многообразий X и Y. Пусть $X = \bigcup U_\alpha$ и $Y = \bigcup V_\beta$ — покрытия X и Y аффинными открытыми множествами. Тогда $X \times Y$ как множество есть просто декартово произведение X на Y; далее, $X \times Y = \bigcup U_\alpha \times V_\beta$; введем на каждом $U_\alpha \times V_\beta$ структуру аффинного многообразия — произведения U_α и V_β. Теперь введем на $X \times Y$ топологию и пучок функций, потребовав, чтобы подмножество в $X \times Y$ было замкнутым, если замкнуты его пересечения со всеми $U_\alpha \times V_\beta$ (в топологии Зарисского аффинного многообразия $U_\alpha \times V_\beta$), и чтобы функция f на открытом подмножестве $U \subset X \times Y$ была регулярна, если и только если для каждого $U_\alpha \times V_\beta$ ограничение $f|_{U \cap (U_\alpha \times V_\beta)}$ регулярно (как рациональная функция на аффинном многообразии $U_\alpha \times V_\beta$).

Предложение 4.2. *Вышеописанная конструкция превращает множество $X \times Y$ в алгебраическое многообразие; это алгебраическое многообразие является произведением X и Y в категорном смысле.*

Доказательство. Доказательство состоит из утомительных формальных манипуляций. Первое утверждение предложения («$X \times Y$ является пространством с пучком») очевидно из определений. Нетрудно также проверить (сделайте это!), что проекции $X \times Y$ на множители являются морфизмами пространств с пучком. Чтобы установить остальные утверждения про $X \times Y$, нам понадобятся две леммы. Первая из них, помимо прочего, устанавливает существование произведения *квазиаффинных* многообразий (так называются многообразия, изоморфные открытым подмножествам аффинных многообразий):

Лемма 4.3. *Если $U' \subset U$ и $V' \subset V$ — открытые подмножества аффинных многообразий U и V, то $U' \times V' \subset U \times V$ является открытым по Зарисскому подмножеством; как алгебраическое многообразие это открытое подмножество является произведением U' и V' в категорном смысле.*

Доказательство. Дополнение к $U' \times V'$ в $U \times V$ является объединением множеств $(U \setminus U') \times V$ и $U \times (V \setminus V')$, каждое из которых, очевидно, замкнуто. Стало быть, $U' \times V'$ открыто в $U \times V$ и тем самым обладает структурой алгебраического многообразия. Докажем, что многообразие $U' \times V'$ обладает универсальным свойством произведения. Пусть $\varphi\colon Z \to U'$ и $\psi\colon Z \to V'$ — два морфизма; компонуя их с вложениями U' и V' в U и V, получаем, что они индуцируют морфизм из Z в $U \times V$ (мы уже проверили, что произведение аффинных многообразий универсальным свойством обладает!), и очевидно, что образ этого морфизма лежит в $U' \times V'$. $\square$

Вторая лемма относится к произвольным пространствам с пучком функций.

Лемма 4.4. *Пусть множество X представлено в виде объединения $X = \bigcup_i U_i$. Предположим, что на каждом из U_i задана структура пространства с пучком, причем выполнены следующие условия:*

1) *для всяких i и j множество $U_i \cap U_j$ является открытым подмножеством как в U_i, так и в U_j;*

2) *для всяких i и j структура пространства с пучком на $U_i \cap U_j$ как на открытом подмножестве U_i совпадает со структурой пространства с пучком на $U_i \cap U_j$ как на открытом подмножестве U_j (то есть совпадают топология и запас регулярных функций на открытых подмножествах).*

Введем на X структуру пространства с пучком, полагая подмножество $Z \subset X$ замкнутым тогда и только тогда, когда $Z \cap U_i$ замкнуто в U_i для каждого i, и полагая функцию f на открытом подмножестве $V \subset X$ регулярной тогда и только тогда, когда для каждого i ограничение $f|_{V \cap U_i}$ регулярно на $V \cap U_i$ относительно структуры пространства с пучком на U_i. Тогда для каждого i подмножество U_i открыто в X, и структура пространства с пучком на U_i, индуцированная с пространства X, совпадает с исходной.

Доказательство. Тот факт, что топология на U_i, индуцированная с X, совпадает с исходной, докажите самостоятельно. Докажем, что и структура пространства с пучком на U_i, индуцированная с X, совпадает с исходной. Пусть, стало быть, $V \subset U_i$ — открытое подмножество, f — функция на V. Нам надо проверить, что следующие условия эквивалентны:

(i) f регулярна на V относительно структуры пространства с пучком на U_i;

(ii) для каждого j ограничение $f|_{V \cap U_j}$ регулярно на $V \cap U_j$ относительно структуры пространства с пучком на U_j.

Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидна (положите $j = i$ в (ii)). Для доказательства (i) $\Rightarrow$ (ii) заметим, что функция $f|_{V \cap U_j}$ регулярна на $V \cap U_j$ относительно структуры пространства с пучком на $U_i \cap U_j$, индуцированной с U_i. По условию леммы эта структура совпадает со структурой пространства с пучком на $U_i \cap U_j$, индуцированной с U_j. Стало быть, $f|_{V \cap U_j}$ регулярна на $V \cap U_j$ относительно структуры пространства с пучком на U_j. Все доказано. $\square$

Теперь можно завершить доказательство. Заметим, что покрытие $X \times Y = \bigcup U_\alpha \times V_\beta$ удовлетворяет условиям леммы 4.4. В самом деле,

$$(U_\alpha \times V_\beta) \cap (U_{\alpha'} \times V_{\beta'}) = (U_\alpha \cap U_{\alpha'}) \times (V_\beta \cap V_{\beta'}), \tag{4.1}$$

и лемма 4.3 показывает, что $U_\alpha \times V_\beta$ и $U_{\alpha'} \times V_{\beta'}$ индуцируют на множестве, стоящем в правой части (4.1), одну и ту же структуру пространства с пучком — произведение многообразий $U_\alpha \cap U_{\alpha'}$ и $V_\beta \cap V_{\beta'}$. Стало быть, согласно лемме 4.4, каждое $U_\alpha \times V_\beta$ изоморфно, как открытое подмножество $X \times Y$, аффинному многообразию $U_\alpha \times V_\beta$. В частности, отсюда вытекает, что $X \times Y$ — алгебраическое многообразие.

Остается проверить, что $X \times Y$ обладает универсальным свойством произведения. В самом деле, пусть $\varphi\colon Z \to X$ и $\psi\colon Z \to Y$ — два морфизма. Нам достаточно показать, что отображение $\phi\colon Z \to X \times Y$, переводящее z в $(\varphi(z), \psi(z))$, является морфизмом. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим покрытие Z открытыми множествами $W_{\alpha\beta} = \varphi^{-1}(U_\alpha) \cap \psi^{-1}(V_\beta)$. Тот факт, что $\phi|_{W_{\alpha\beta}}$ является морфизмом, следует из того, что $U_\alpha \times V_\beta \subset X \times Y$ изоморфно, по доказанному, произведению аффинных многообразий U_α и V_β. Осталось применить еще один общий факт: если Z и V — пространства с пучком функций, $Z = \bigcup W_i$ — открытое покрытие, и если $\phi\colon Z \to V$ — такое отображение, что все $\phi|_{W_i}\colon W_i \to V$ — морфизмы пространств с пучком, то и ϕ — морфизм пространств с пучком. Проверку этого факта оставим в качестве упражнения. $\square$

Отметим еще, что при построении $X \times Y$ можно исходить из любых аффинных открытых покрытий $\{U_\alpha\}$ и $\{V_\beta\}$: универсальное свойство произведения гарантирует нам, что результат во всех случаях будет один и тот же.

Мы доказали существование произведения многообразий в общем виде; теперь давайте дадим два важных примера конкретных конструкций произведений. Наш первый пример — произведение двух проективных пространств.

Пусть $\mathbb{P}^m$ и $\mathbb{P}^n$ — два проективных пространства. Множество всех ненулевых $(m+1) \times (n+1)$-матриц, рассматриваемых с точностью до пропорциональности, мы будем рассматривать как проективное пространство $\mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$. Однородные координаты в этом пространстве будем обозначать $(\ldots : m_{ij} : \ldots)$, где $i \in [0; m]$ и $j \in [0; n]$.

Определение 4.5. *Многообразием Сегре* называется множество $S \subset \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$, состоящее из точек, соответствующих матрицам ранга 1.

Поскольку каждый минор матрицы $\|m_{ij}\|$ является однородным многочленом, многообразие Сегре замкнуто по Зарисскому в $\mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$ (то, что оно неприводимо и тем самым имеет право называться многообразием, мы сейчас увидим).

Предложение 4.6. *Многообразие Сегре неприводимо и является произведением $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$.*

Доказательство. Как известно, ненулевая матрица $M = \|m_{ij}\|$ имеет ранг 1 тогда и только тогда, когда существуют векторы $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m)$ и $\mu = (\mu_0, \ldots, \mu_n)$ такие, что $m_{ij} = \lambda_i \mu_j$, причем эти два вектора определены по матрице однозначно с точностью до пропорциональности (если M задает линейное отображение из k^{n+1} в k^{m+1}, то λ — образующая $\operatorname{im} M$, а μ — уравнение $\ker M$). Если рассматривать λ и μ как однородные координаты точек в $\mathbb{P}^m$ и $\mathbb{P}^n$, то отображение $\varkappa\colon m \mapsto (\lambda, \mu)$ корректно определено и является биекцией множества S на $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$; отождествим S и $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ как множества с помощью отображения $\varkappa$.

Теперь все без труда получается. Во-первых, повторяя доказательство неприводимости произведения аффинных многообразий, легко убедиться, что S неприводимо. Чтобы доказать, что S — произведение проективных пространств $\mathbb{P}^m$ и $\mathbb{P}^n$, достаточно проверить, что для любого многообразия Z и для любых морфизмов $\varphi\colon Z \to \mathbb{P}^m$ и $\psi\colon Z \to \mathbb{P}^n$ отображение $\xi\colon z \mapsto \varkappa^{-1}(\varphi(z), \psi(z))$ является морфизмом из Z в S. Для этого достаточно проверить, что морфизмами являются ограничения Z на все элементы какого-нибудь открытого покрытия Z. Поэтому можно сразу считать, что $\varphi(Z) \subset \mathbb{A}^m_i$ и $\psi(Z) \subset \mathbb{A}^n_j$ для некоторых i и j. В этом случае существуют регулярные на Z функции $f_0, \ldots, f_m$ такие, что $\varphi(x) = (f_0(x) : \cdots : f_m(x))$ для всех x (при этом можно даже считать, что функция f_i тождественно равна единице), и аналогично существуют регулярные функции $g_0, \ldots, g_n$ такие, что $\psi(x) = (g_0(x) : \cdots : g_n(x))$. Тогда ξ переводит x в точку многообразия $S \subset \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$ с однородными координатами $(\cdots : f_i(x)g_j(x) \cdots :)$; очевидно, что такое отображение — морфизм. $\square$

Полезно посмотреть, какое подмножество в многообразии Сегре $S = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{n^2+2n}$ соответствуют диагонали. Легко видеть, что, при отождествлении однородных координат точек S с $(n+1) \times (n+1)$ — матрицами ранга 1, диагональ $\Delta \subset S$ соответствует множеству симметрических матриц. В частности, как подмножество S она задается алгебраическими (и даже линейными) уравнениями и тем самым замкнута в S. Многообразие $\Delta \subset S$ называется *многообразием Веронезе;* с ним и его родственниками мы еще встретимся.

Наше наблюдение относительно диагонали в $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ имеет и «общетеоретическое» значение.

Определение 4.7. Алгебраическое многообразие называется квазипроективным, если оно изоморфно открытому подмножеству проективного многообразия.

Например, всякое аффинное многообразие квазипроективно (если X реализовано как замкнутое подмножество в $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n_0 \subset \mathbb{P}^n$, то X

открыто в $\overline{X} \subset \mathbb{P}^n$).

Предложение 4.8. *Если X — квазипроективное многообразие, то диагональ замкнута в $X \times X$.*

Доказательство. Если X проективно и реализовано как замкнутое подмножество в $\mathbb{P}^n$, то $X \times X$ естественно вложено как замкнутое подмножество в $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$, и $\Delta_X = (X \times X) \cap \Delta_{\mathbb{P}^n}$, так что замкнутость диагонали в $X \times X$ вытекает из аналогичного факта для $\mathbb{P}^n$.

Если U открыто в проективном многообразии X, то $U \times U$ вложено как открытое подмножество в $X \times X$, и $\Delta_U = (U \times U) \cap \Delta_X$, так что все следует из уже установленной замкнутости Δ_X в X. □

Замечание 4.9. К сожалению, предыдущее доказательство не является переливанием из пустого в порожнее: существуют многообразия с незамкнутой диагональю. Вот пример, кочующий из учебника в учебник. Склеим два экземпляра $\mathbb{A}^1$, отождествив в них подмножество $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$. На полученном множестве X (это — аффинная прямая, на которой вместо точки 0 стоят две точки 0_1 и 0_2) введем топологию (замкнутые подмножества — конечные множества и само X) и пучок функций (функция на $U \subset X$ регулярна, если регулярны ее ограничения на пересечения U с обоими экземплярами $\mathbb{A}^1$). Для желающих освоить понятие абстрактного алгебраического многообразия полезным упражнением будет проверить, что X с этой топологией и пучком функций является алгебраическим многообразием и что в замыкание диагонали в $X \times X$ входят еще и точки $(0_1, 0_2)$ и $(0_2, 0_1)$.

Многообразия X, у которых диагональ замкнута в $X \times X$, называются *отделимыми* (поскольку замкнутость диагонали характеризует отделимые топологические пространства). Далее мы будем считать, что требование отделимости входит в определение алгебраического многообразия.

Наш второй пример явного описания произведения многообразий — это произведение $\mathbb{P}^n \times Y$, где Y — аффинное многообразие. Пусть $A = k[Y]$; обозначим $R = A[X_0, \dots, X_n]$ (кольцо многочленов). Для каждого однородного многочлена $F = \sum a_{i_0,\dots,i_n} X_0^{i_0} \dots X_n^{i_n} \in R$ обозначим

$$V(F) = \left\{ ((x_0 : \dots : x_n); y) \in \mathbb{P}^n \times Y \mid \sum a_{i_0,\dots,i_n}(y) x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n} = 0 \right\}$$

(всякий элемент кольца A мы тоже рассматриваем как однородный многочлен нулевой степени). Структура алгебраического многообразия на $\mathbb{P}^n \times Y$ описывается так:

Предложение 4.10. *Замкнутые подмножества в* $\mathbb{P}^n \times Y$ *— это пересечения множеств вида* $V(F)$*. Далее, назовем рациональной функцией отношение* F/G *двух однородных многочленов из* R *одинаковой степени, скажем, что рациональные функции* F/G *и* F_1/G_1 *называются равными, если*

$$F(x_0, \ldots, x_n; y)/G(x_0, \ldots, x_n; y) = F_1(x_0, \ldots, x_n; y)/G_1(x_0, \ldots, x_n; y)$$

для всех точек $((x_0 : \cdots : x_n), y) \in \mathbb{P}^n \times Y$*, для которых обе части этого равенства имеют смысл, и что рациональная функция* h *называется определенной в точке* $p \in \mathbb{P}^n \times Y$*, если* h *можно представить в виде* F/G*, где* G *не обращается в нуль в* p*. Тогда для открытого множества* $U \subset \mathbb{P}^n \times Y$ *множество* $k[U]$ *совпадает с множеством рациональных функций, определенных во всех точках* U*.*

Доказательство этого предложения — упражнение для слушателей (надо конкретизировать доказательство существования произведения в общем случае, склеив аффинные многообразия $\mathbb{A}^n_i \times Y$). Заметьте, что описания структуры алгебраического многообразия на $\mathbb{P}^n \times Y$ и $\mathbb{P}^n$ полностью аналогичны (поэтому $\mathbb{P}^n \times Y$ часто называют проективным пространством над кольцом A).

Теперь перейдем к важной теореме, называемой теоремой о полноте проективного пространства.

Теорема 4.11. *Пусть* Y *— алгебраическое многообразие,* $Z \subset \mathbb{P}^n \times Y$ *— замкнутое подмножество. Тогда образ* Z *при проекции* $p\colon \mathbb{P}^n \times Y \to Y$ *замкнут в* Y*.*

Следствие 4.12. *Если* X *— проективное многообразие,* Y *— любое отделимое многообразие (в частности — любое квазипроективное многообразие) и* $\varphi\colon X \to Y$ *— морфизм, то* $\varphi(X)$ *замкнуто в* Y*.*

Доказательство. Если X реализовано как замкнутое подмножество в $\mathbb{P}^n$, то график морфизма φ является замкнутым подмножеством в $\mathbb{P}^n \times Y$ (замкнутость вытекает из того, что диагональ замкнута в $Y \times Y$: все многообразия предполагаются отделимыми!); множество $\varphi(X)$ является проекцией графика. □

Следствие 4.13. *Всякая функция, регулярная на проективном многообразии, является константой.*

Доказательство. Рассмотрим регулярную функцию f на проективном многообразии X как морфизм из X в $\mathbb{A}^1$. В силу предыдущего следствия, $f(X) \subset \mathbb{A}^1$ замкнуто; если $f(X) = \mathbb{A}^1$, то получим противоречие с предыдущим следствием, взяв композицию f с вложением $\mathbb{A}^1 \subset \mathbb{P}^1$. Замкнутые же подмножества $\mathbb{A}^1$, отличные от всего $\mathbb{A}^1$, суть конечные наборы точек. $\square$

Следствие 4.14. *Всякий морфизм из проективного многообразия в аффинное является отображением в точку.* $\square$

Прежде чем доказывать теорему 4.11, поясним ее геометрический и алгебраический смысл.

Геометрический смысл: так в алгебраической геометрии отражается компактность проективных пространств. В самом деле, нетрудно доказать, что «хорошее» (хаусдорфово локально компактное) топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда проекция $X \times Y \to Y$ является замкнутым отображением для любого «хорошего» пространства Y.

Алгебраический смысл: пусть Y аффинно (это — основной случай). Тогда $Z \subset \mathbb{P}^n \times Y$ задается системой уравнений вида $\sum a_{i_0,\ldots,i_n} x_0^{i_0} \ldots x_n^{i_n} = 0$, у которых коэффициенты — регулярные функции на Y. Рассмотрим эту систему как систему однородных уравнений относительно $x_0, \ldots, x_n$ с параметром (параметр — точка Y). Тогда $p(Z) \subset Y$ есть множество значений параметра, при которых система имеет нетривиальное (то есть такое, в котором не все x_j равны нулю) решение. Теорема утверждает, что это множество задается алгебраическими уравнениями на параметр. Если не предполагать уравнения однородными, то, как знает всякий, сдававший экзамены в университет, условие существования решения не обязательно является «замкнутым»: условия, которые приходится накладывать на параметры, включают в себя, как правило, не только уравнения, но и неравенства.

Доказательство теоремы 4.11. Так как $p(Z)$ замкнуто тогда и только тогда, когда $p(Z) \cap U$ замкнуто в U для всех $U \subset Y$ из некоторого открытого покрытия, мы можем сразу считать Y аффинным; пусть $A = k[Y]$. Для всякого многочлена $f \in A[X_0, \ldots, X_n]$ и для $y \in Y$ будем обозначать через $f^y \in k[X_0, \ldots, X_n]$ многочлен, полученный подстановкой y в коэффициенты f — функции на Y. Пусть $Z \subset \mathbb{P}^n \times Y$ задается системой однородных уравнений $f_\alpha(x_0, \ldots, x_n) = 0$, $\alpha \in [1; m]$. Положим $\deg f_\alpha = d_\alpha$. Обозначим через $R_r \subset k[X_0, \ldots, X_n]$ линейное подпространство, состоящее из однородных многочленов степени r. Тогда «однородный» вариант теоремы Гильберта о нулях (предложение 2.9, а) показывает, что $y \notin p(Z)$ тогда и только тогда, когда однородный идеал, порожденный f_α^y в $k[X_0, \ldots, X_n]$, содержит R_r для некоторого $r > 0$. Множество тех $y \in Y$, для которых $(\ldots, f_\alpha^y, \ldots) \supset R_r$, обозначим U_r; теорема будет доказана, если окажется, что все U_r открыты. Так оно и есть, и вот почему: $y \in U_r$ тогда и только тогда, когда линейное отображение $\bigoplus_{i=1}^m R_{r-d_i} \to R_r$, заданное формулой $(g_1, \ldots, g_m) \mapsto \sum g_i f_i^y$, является эпиморфизмом (мы полагаем $R_j = 0$ для $j < 0$). Условие «матрица с коэффициентами, зависящими от параметра, имеет максимальный ранг» задает открытое по Зарисскому подмножество в пространстве параметров (это подмножество выделяется необращением в нуль каких-то миноров). Доказательство закончено. Полезным упражнением будет разобраться, почему нельзя, имитируя это доказательство, установить замкнутость проекции $\mathbb{A}^n \times Y \to Y$. $\square$

Приведем простой, но типичный пример применения теоремы 4.11. Напомним, что *гиперповерхностью степени* d в $\mathbb{A}^n$ (соответственно, в $\mathbb{P}^n$) называется множество нулей неприводимого (однородного в случае $\mathbb{P}^n$) многочлена степени d. Если $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n$ (соответственно, $X = V(F) \subset \mathbb{P}^n$) — гиперповерхность, то точка $x \in X$ называется *особой*, если все частные производные f (соответственно, F) в этой точке обращаются в нуль. Проверьте самостоятельно, что определения для $\mathbb{A}^n$ и $\mathbb{P}^n$ согласованы: точка x на гиперповерхности $X \subset \mathbb{A}^n$ особа тогда же, когда на ее замыкании в $\mathbb{P}^n$. Гиперповерхность называется *неособой,* если у нее нет особых точек. Сейчас мы убедимся, что неособых гиперповерхностей очень много:

Предложение 4.15. *Почти все гиперповерхности в $\mathbb{P}^n$ данной степени d неособы.*

Поясним формулировку. Ненулевые однородные многочлены степени d, рассматриваемые с точностью до пропорциональности, образуют проективное пространство; утверждается, что множество точек, соответствующих неособым гиперповерхностям, содержит непустое открытое по Зарисскому подмножество этого пространства.

Доказательство. Пусть $\mathbb{P}^N$ — проективное пространство, параметризующее гиперповерхности степени d в $\mathbb{P}^n$, о котором шла речь выше (проверьте, что $N = \binom{n+d}{d} - 1$). Ненулевой однородный многочлен F

степени d определяет точку пространства $\mathbb{P}^N$, которую мы будем обозначать (F). Рассмотрим множество

$$Z = \big\{ \big((x_0, \ldots, x_n), (F)\big) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^N \mid \\ \partial F(x_0, \ldots, x_n)/\partial x_0 = \cdots = \partial F(x_0, \ldots, x_n)/\partial x_n = 0 \big\}.$$

Очевидно, Z замкнуто в $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^N$; по теореме 4.11 его проекция $p(Z) \subset \mathbb{P}^N$ замкнута в $\mathbb{P}^N$. Чтобы доказать предложение, нам тем самым достаточно проверить, что $p(Z) \neq \mathbb{P}^n$, то есть всего лишь предъявить для каждого d неособую гиперповерхность степени d. Если характеристика основного поля равна нулю, в качестве таковой сгодится «гиперповерхность Ферма», заданная уравнением $\sum_{i=0}^{n} x_i^d = 0$; в характеристике p, однако, этот пример не годится при d, делящемся на p, так что в этом случае будем действовать аккуратнее. Выберем d различных элементов $a_1, \ldots, a_d \in k$; теперь, если d нечетно, положим

$$F = (x_0 + a_1x_1)\ldots(x_0 + a_dx_1) + (x_2 + a_1x_3)\ldots(x_2 + a_dx_3) + \ldots \\ + (x_{n-1} + a_1x_n)\ldots(x_{n-1} + a_dx_n),$$

а если $d = 2l$ четно, то заменим в этой сумме последнее слагаемое: положим

$$F = \sum_{i=1}^{l-1}(x_{2i-2} + a_1x_{2i-1})\ldots(x_{2i-2} + a_dx_{2i-1}) + \\ x_{2l-2}x_{2l-1}^{d-1} + (x_{2l-1} + a_1x_{2l})\ldots(x_{2l-1} + a_dx_{2l}).$$

Проверьте самостоятельно, что в обоих случаях гиперповерхность, заданная уравнением $F = 0$, неособа для почти всех наборов $(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{A}^d$ (это сводится к проверке того, что у каждого из слагаемых все частные производные не могут одновременно обратиться в нуль). $\square$