Лекция 5. Размерность

Существует несколько эквивалентных определений размерности алгебраического многообразия. Начнем с самого простого, хотя и не самого геометрически наглядного.

Определение 5.1. Размерностью алгебраического многообразия X называется степень трансцендентности поля алгебраических функций $k(X)$ над основным полем k. Размерность многообразия X обозначается $\dim X$.

Из этого определения ясно, что размерность многообразия не меняется при переходе к его открытому подмножеству, и вообще размерности бирационально изоморфных многообразий совпадают, а также что $\dim \mathbb{A}^n = \dim \mathbb{P}^n = n$.

Для начала проверим, что при переходе к замкнутому подмногообразию размерность, как и должно быть, уменьшается.

Предложение 5.2. *Если Y — неприводимое замкнутое подмножество в алгебраическом многообразии X, отличное от самого X, то $\dim Y < \dim X$.*

Доказательство. Можно считать, что X и Y аффинны и реализованы как замкнутые подмножества в $\mathbb{A}^n$. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — координатные функции на X; если $\dim X = d$, то не ограничивая общности можно считать, что $x_1, \dots, x_d$ — базис трансцендентности $k(X)$ над k. Достаточно показать, что $x_1, \dots, x_d$ алгебраически зависимы над k в поле $k(Y)$. Чтобы это сделать, предположим, рассуждая от противного, что $x_1, \dots, x_d$ алгебраически независимы в $k(Y)$, и пусть $\pi\colon Y \to \mathbb{A}^d$ — проекция на первые d координат. Тогда $\pi(Y)$ не содержится ни в одной гиперповерхности в $\mathbb{A}^d$; стало быть, π — доминантный морфизм и $\pi(Y) \supset U$, где $U \subset \mathbb{A}^d$ — открытое подмножество (предложение 3.11). Пусть теперь $f \in k[X]$ — ненулевая регулярная функция, обращающаяся в нуль на Y. Записывая ее минимальное уравнение в $k(X)$ над полем рациональных дробей $k(x_1, \dots, x_d)$, получаем тожество в $k(X)$:

$$f^r + a_1(x_1, \dots, x_d) f^{r-1} + \dots + a_r(x_1, \dots, x_d) = 0. \tag{5.1}$$

По доказанному, существует открытое множество $U' \subset \mathbb{A}^d$, содержащееся в $\pi(Y)$, на котором все рациональные функции a_j определены. Стало быть, для всякой точки $(x_1, \dots, x_d) \in U'$ существуют такие $x_{d+1}, \dots, x_n$, что $(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}, \dots, x_n) \in Y \subset \mathbb{A}^n$. Подставляя эти n чисел в (5.1), получаем $a_r(x_1, \ldots, x_d) = 0$. Значит, $a_r = 0$, в противоречие с минимальностью уравнения (5.1). $\square$

Теперь опишем подмногообразия коразмерности 1 в аффинных или проективных пространствах. Это, к счастью, просто:

Предложение 5.3. *Пусть X — неприводимое замкнутое подмножество в $\mathbb{A}^n$ (соответственно, $\mathbb{P}^n$). Тогда $\dim X = n-1$ в том и только том случае, когда X — гиперповерхность.*

Доказательство. Проведем доказательство для подмногообразий $\mathbb{A}^n$ (для $\mathbb{P}^n$ рассуждение аналогично). В одну сторону утверждение совсем очевидно. В самом деле, пусть $X = V(f) \subset \mathbb{A}^n$ — гиперповерхность, где $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ — неприводимый многочлен. Не ограничивая общности, можно считать, что X_n входит в f, и записать

$$f = f_0 \cdot X_n^d + f_1 \cdot X_n^{d-1} + \cdots + f_d,$$

где все f_j не зависят от X_n. Тогда ясно, что $k(X)$ является расширением степени d поля рациональных дробей $k(X_1, \ldots, X_{n-1})$ и тем самым имеет степень трансцендентности $n-1$ над k. Обратно, предположим, что $X \subset \mathbb{A}^n$ замкнуто и неприводимо и $\dim X = n-1$. Координатные функции $x_1, \ldots, x_n \in k(X)$ должны быть алгебраически зависимы над k. Пусть $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ — многочлен минимальной степени, для которого $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ в поле $k(X)$. Очевидно, f неприводим и $X \subset V(f)$; если бы включение было строгим, то из предложения 5.2 и только что доказанной первой части нашего предложения следовало бы, что $\dim X < \dim V(f) = n-1$ — противоречие. $\square$

Замечание 5.4. Описание подмногообразий коразмерности 2 в $\mathbb{P}^n$ (даже гладких) является нерешенной проблемой.

Другое простое свойство размерности — ее аддитивность.

Предложение 5.5. $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$.

Доказательство. Так размерность не меняется при переходе к открытому подмножеству, можно считать, что X и Y реализованы как замкнутые подмножества в $\mathbb{A}^M$ и $\mathbb{A}^N$ соответственно. Если $x_1, \ldots, x_M$ и $y_1, \ldots, y_N$ — координатные функции на X и Y и при этом $\dim X = m, \dim Y = n$, то после перенумерации координат можно считать, что $x_1, \ldots, x_m$ (соответственно, $y_1, \ldots, y_n$) составляют базис трансцендентности $k(X)$ (соотв. $k(Y)$) над k. Ясно, что $k(X \times Y)$ алгебраично над $k(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, так что нам надо только проверить, что $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ алгебраически независимы над k. Пусть это не так; тогда имеется соотношение

$$\sum a_{i_1,\ldots,i_m}(y_1, \ldots, y_n) x_1^{i_1} \ldots x_m^{i_m} = 0, \tag{5.2}$$

где все $a_{i_1,\ldots,i_m}$ — полиномиальные функции от $y_1, \ldots, y_n$. Подставляя в $a_{i_1,\ldots,i_m}$ координаты любой точки $(y_1, \ldots, y_N) \in Y$, получаем алгебраическую зависимость между $x_1, \ldots, x_m$ над k, все коэффициенты которой должны, стало быть, равняться нулю. Значит, все функции $a_{i_1,\ldots,i_m}$ обращаются в нуль на Y. Поскольку $y_1, \ldots, y_n$ алгебраически независимы в $k(Y)$, из этого следует, что каждый из многочленов $a_{i_1,\ldots,i_m}$ нулевой, то есть все коэффициенты соотношения (5.2) суть нули. Все доказано. $\square$

Чтобы получить более точные результаты о размерности, нам придется научиться работать с морфизмами, все слои которых конечны (такие морфизмы называются квазиконечными). К сожалению, непосредственно с квазиконечными морфизмами работать неудобно, поэтому, как это не единожды случается в алгебраической геометрии, приходится вместо интуитивно прозрачного понятия иметь дело с более алгебраизированным, неравносильным (хотя и близким) и на первый взгляд менее понятным, но более удобным технически. В данном случае вместо квазиконечных морфизмов мы будем рассматривать так называемые конечные морфизмы. Так как конечные морфизмы будут нам нужны и далее, мы расскажем про них больше, чем надо непосредственно для теории размерности.

Чтобы дать определение конечного морфизма, вспомним сначала определение и простейшие свойства целой зависимости (опущенные подробности можно продумать самостоятельно или посмотреть в книгах Ленга «Алгебра», гл. IX, §1, или Атьи и Макдональда «Введение в коммутативную алгебру», с. 76–78).

Определение 5.6. Пусть A — подкольцо кольца B (все кольца предполагаются коммутативными и имеющими единицу). Элемент $x \in B$ называется *целым над* A, если выполнено одно из двух равносильных условий:

1) x удовлетворяет уравнению вида

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

где все a_j лежат в A (такие уравнения называют еще *целыми* уравнениями);

2) x лежит в подкольце $B' \subset B$, содержащем A и конечно порожденном как A-модуль.

Докажем эквивалентность этих условий. (1) влечет (2), так как из того, что x удовлетворяет уравнению степени n со старшим коэффициентом 1, следует, что $1, x, \ldots, x^{n-1}$ порождают подкольцо $A[x]$ как A-модуль, и в качестве B' можно взять $A[x]$. Если, напротив, выполнено (2) и $b_1, \ldots, b_n$ — образующие B' как A-модуля, то запишем

$$xb_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_j \qquad \text{для всех } i \in [1; n], \tag{5.3}$$

где $a_{ij} \in A$, и положим $f = \det \|x\delta_{ij} - a_{ij}\| \in B'$. Из (5.3) легко видеть, что $fb_j = 0$ для всех j. Так как единица кольца B' является линейной комбинацией b_j с коэффициентами из A, отсюда следует, что $f \cdot 1 = f = 0$. Расписывая выражение для определителя, получаем, что x удовлетворяет целому уравнению степени n над A, что доказывает импликацию (2) $\Rightarrow$ (1).

Вот два типичных примера. Если A — кольцо с однозначным разложением на множители и K — его поле частных, то элемент $x \in K$ цел над A тогда и только тогда, когда $x \in A$ (вспомните, как доказывается, что у несократимой дроби, являющейся корнем многочлена с целыми коэффициентами, знаменатель является делителем старшего коэффициента). Число $a + b\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ цело над $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда коэффициенты $a, b \in \mathbb{Q}$ либо оба целые, либо оба полуцелые (т.е. несократимые дроби со знаменателем 2).

Сумма и произведение целых над A элементов также целы над A. В самом деле, если $x, y \in B$ целы над A, то кольцо $A[x, y] \subset B$ конечно порождено как A-модуль и для того, чтобы удостовериться в целости $x + y$ и xy над A, можно положить $B' = A[x, y]$ во втором определении целой зависимости.

Наконец, еще один термин: гомоморфизм колец $f\colon A \to B$ называется *целым,* если всякий элемент B цел над $f(A)$; говорят также, что кольцо B *цело* над A. Композиция двух целых гомоморфизмов является целой (чтобы это установить, надо проверить вот что: если $A \subset B$ и $B \subset C$ — целые расширения, то и $A \subset C$ — целое расширение; докажите это самостоятельно или подсмотрите у Ленга или Атьи и Макдональда).

Теперь, наконец, можно дать

Определение 5.7. Морфизм $\varphi\colon X \to Y$ называется *конечным,* если у всякой точки $y \in Y$ существует такая аффинная окрестность $U \ni y$, что множество $\varphi^{-1}(U) \subset X$ тоже аффинно, и при этом гомоморфизм колец $\varphi^*\colon k[U] \to k[\varphi^{-1}(U)]$ является целым.

Тривиальный пример конечного морфизма — замкнутое вложение. Более содержательный пример — проекция параболы $x = y^2$ на ось абсцисс. Это конечный морфизм, поскольку $k[x, y]/(y^2 - x)$ порождается над $k[x]$ функцией y, удовлетворяющей целому уравнению $y^2 - x = 0$.

Для начала проверим, что слои конечного морфизма действительно конечны.

Предложение 5.8. *Если $\varphi\colon X \to Y$ — конечный морфизм, то все слои φ конечны.*

Доказательство. Ввиду определения можно считать, что X и Y аффинны, причем $X \subset \mathbb{A}^n$. Пусть $y \in Y$; если $f \in k[X]$, то имеется тождество

$$f^r + (a_1 \circ \varphi) f^{r-1} + \cdots + (a_r \circ \varphi) = 0, \tag{5.4}$$

где $a_j \in k[Y]$. Если $x \in \varphi^{-1}(y)$, то, подставляя x в регулярную функцию на X, стоящую в левой части (5.4), получаем, что $f(x)$ — корень уравнения степени r, зависящего от f и y, но не от x, так что f может принимать в точках слоя над y не более чем r различных значений. В частности, каждая координатная функция на X принимает в точках слоя конечное число значений, так что и сам слой конечен. □

Итак, всякий конечный морфизм имеет конечные слои; обратное, однако, неверно. Например, проекция π гиперболы $xy = 1$ на ось абсцисс конечным морфизмом не является: функция $y = 1/x \in k[\pi^{-1}(U)]$ не будет целой над $k[U]$ ни для какого открытого подмножества $U \subset \mathbb{A}^1$, содержащего нуль. Сравните этот пример с проекцией параболы, о которой шла речь выше. Интуитивно можно представлять себе конечный морфизм как морфизм с конечными слоями, у которого точки в слоях могут сливаться, но не уходить на бесконечность.

Вот тривиальное, но важное следствие из определения конечного морфизма:

Предложение 5.9. *Если $\varphi\colon X \to Y$ — конечный и доминантный морфизм, то $\dim X = \dim Y$.*

Доказательство. Поле $k(X)$ алгебраично над $k(Y)$. □

Теперь докажем результат, доставляющий массу примеров конечных морфизмов.

Определение 5.10. Морфизм $\varphi\colon X \to Y$, раскладывающийся в композицию замкнутого вложения $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n \times Y$ и проекции $\mathbb{P}^n \times Y \to Y$, называется *проективным.*

Любой морфизм из проективного многообразия проективен (для доказательства рассмотрите график). Теорему 4.11 можно переформулировать так: всякий проективный морфизм замкнут.

Предложение 5.11. *Всякий проективный морфизм с конечными слоями конечен.*

Доказательство. Пусть X — замкнутое подмногообразие в $\mathbb{P}^n \times Y$ и морфизм $\varphi\colon X \to Y$, индуцированный проекцией, имеет конечные слои. Покажем, что φ конечен. Так как $\varphi(X)$ замкнуто в Y по теореме 4.11, то можно, не ограничивая общности, считать, что $\varphi(X) = Y$.

Пусть $y \in Y$; отождествим $\varphi^{-1}(y)$ с конечным множеством точек $S \subset \mathbb{P}^n$. Пусть $H \subset \mathbb{P}^n$ — гиперплоскость, не пересекающая конечного множества S. По теореме 4.11 множество $\varphi(X \cap (H \times Y))$ замкнуто в Y, а по выбору гиперплоскости H это множество не содержит y. Следовательно, у точки y существует аффинная окрестность $U \subset Y$ такая, что $\varphi^{-1}(U) = X \cap ((\mathbb{P}^n \setminus H) \times U)$. Так как дополнение к гиперплоскости в $\mathbb{P}^n$ изоморфно $\mathbb{A}^n$, многообразие $V = \varphi^{-1}(U)$, будучи замкнутым подмножеством в аффинном многообразии, является аффинным.

Полдела сделано, осталось доказать, что $k[V]$ цело над $A = k[U]$. Ввиду второго определения целой зависимости все будет доказано, если мы покажем, что $k[V]$ конечно порождено как A-модуль (мы отождествили A с его образом в $k[V]$ относительно φ^*). Многообразие V задается в $\mathbb{P}^n \times U$ системой уравнений $F_\alpha(y; x_0, \ldots, x_n) = 0$, где F_α — однородные многочлены из $A[X_0, \ldots, X_n]$. Выберем систему координат в $\mathbb{P}^n$ так, чтобы гиперплоскость H задавалась уравнением $x_0 = 0$. Если обозначить $x_j = X_j/X_0$ для $j \in [1; n]$, то $k[V] = A[x_1, \ldots, x_n]$. Запишем теперь условие $V \cap (H \times Y) = \varnothing$. По однородному варианту теоремы о нулях это равносильно тому, что идеал в $A[X_0, \ldots, X_n]$, порожденный X_0 и многочленами F_α, содержит все мономы степени r от $X_0, \ldots, X_n$ для некоторого $r > 0$. Пусть M — произвольный моном степени r от $X_1, \ldots, X_n$. Тогда выполнено тождество $M = X_0 P + \sum G_\alpha F_\alpha$, где $P \in A[X_0, \ldots, X_n]$ однороден степени $r - 1$. Поделим обе части этого тождества на X_0^r, так, чтобы в обеих частях оказались многочлены от $x_1, \ldots, x_r$, и ограничим обе части на V. При этом слагаемые с F_α пропадут, и окажется, что всякий моном степени r от $x_1, \ldots, x_n$ тождественно равен в кольце $k[V]$ многочлену от $x_1, \ldots, x_n$ степени $\leqslant r - 1$.

Поскольку $k[V] = A[x_1, \ldots, x_n]$, отсюда следует, что $k[V]$ — конечно порожденный A — модуль. Доказательство закончено. $\square$

Еще два свойства конечных морфизмов мы оставим без доказательства (и без применения в этом курсе). Во-первых, всякий конечный морфизм замкнут (то есть образы замкнутых подмножеств замкнуты). Во-вторых, если $\varphi\colon X \to Y$ — конечный морфизм, то для *любого* аффинного открытого подмножества $U \subset Y$ его прообраз $\varphi^{-1}(U)$ аффинен и индуцированный гомоморфизм колец $k[U] \to k[\varphi^{-1}(U)]$ цел (определение конечного морфизма гарантирует лишь, что это верно для всех U из какого-то аффинного открытого покрытия). Из этого, кстати, следует, что композиция конечных морфизмов конечна — факт, который непосредственно из нашего определения не виден.

Вернемся к геометрии.

Предложение 5.12. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие, $L \subset \mathbb{P}^n$ — линейное подмногообразие размерности s, причем $X \cap L = \varnothing$. Тогда проекция с центром L является конечным морфизмом из X в $\mathbb{P}^{n-s-1}$.*

Доказательство. Поскольку всякий морфизм $X \to Y$, где X проективно, является проективным, предложение 5.11 показывает, что конечность проекции будет следовать из конечности ее слоев. Чтобы установить конечность слоев π_L, заметим, что проекция из s-мерного линейного подпространства является композицией $s+1$ проекций из точки, так что достаточно установить конечность слоев при проекции из точки. Однако при проекции X из точки $p \notin X$ всякий слой имеет вид $\ell \cap X$, где ℓ — прямая, содержащая p. Так как $\ell \cap X$ замкнуто в ℓ и не совпадает со всем ℓ (оно не содержит p), то это множество конечно. $\square$

Доказанное предложение позволяет дать забавную характеризацию размерности подмногообразий проективного пространства.

Предложение 5.13. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — проективное многообразие, и пусть s — максимальная размерность линейных подпространств в $\mathbb{P}^n$, не пересекающихся с X. Тогда* $\dim X = n - s - 1$.

Доказательство. Если $L \subset \mathbb{P}^n$ — линейное подпространство размерности s, не пересекающее X, то проекция $\pi_L\colon X \to \pi_L(X) \subset \mathbb{P}^{n-s-1}$ — конечный морфизм, откуда $\dim X = \dim \pi_L(X) \leqslant n - s - 1$. Если неравенство строгое, то существует точка $p \in \mathbb{P}^{n-s-1} \setminus \pi_L(X)$. Тогда $L' = \overline{\pi_L^{-1}(p)} \subset \mathbb{P}^n$ является $s+1$-мерным линейным подпространством, не пересекающим X, так что s не максимально, можно спроектировать X из L' — и т. д., пока не дойдем до максимально возможного значения s и равенства $\dim X = n - s - 1$. $\square$

Следующее предложение, называющееся теоремой Нётер о нормализации, можно было бы вывести из предложения 5.11; мы дадим непосредственное доказательство.

Предложение 5.14. *Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — аффинное многообразие, реализованное как замкнутое подмножество $\mathbb{A}^n$. Тогда существует линейная проекция $X \to \mathbb{A}^d$, где $d = \dim X$, являющаяся конечным сюръективным морфизмом. При этом индуцированное вложение колец $k[X_1, \dots, X_d] \subset k[X]$ является целым расширением.*

Доказательство. Мы докажем, что, если $X \neq \mathbb{A}^n$, существует такая линейная проекция $\varphi\colon X \to \mathbb{A}^{n-1}$, что $\varphi(X) = Y$ замкнуто в $\mathbb{A}^{n-1}$ и расширение колец $\varphi^* k[Y] \hookrightarrow k[X]$ будет целым; отсюда наше предложение следует по индукции.

Итак, рассмотрим $\mathbb{A}^n$ как $\mathbb{A}^n_0 \subset \mathbb{P}^n$; тогда в бесконечно удаленной гиперплоскости $H = \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{A}^n$ однородными координатами служат $(x_1 : \dots : x_n)$. Пусть $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ — многочлен, зануляющийся на X (если таких нет, то $X = \mathbb{A}^n$). Тогда $\overline{V(f)} \cap H = V(F)$, где F — однородная компонента старшей степени многочлена f. Пусть $p \in H \setminus V(F)$, тогда тем более $p \notin \overline{X}$; можно выбрать систему координат так, чтобы p имела однородные координаты $(0 : \dots : 0 : 1)$. Тот факт, что F не обращается в нуль в точке p, означает, что многочлен f можно записать в виде

$$f = c x_n^r + g_1 x_n^{r-1} + \dots + g_r, \tag{5.5}$$

где $c \neq 0$ — константа и g_j — многочлены, не содержащие x_n. Обозначим буквой $\varphi\colon X \to \mathbb{A}^{n-1}$ проекцию, действующую по формуле $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})$. Поскольку $\varphi(X) = \pi_p(\overline{X}) \cap \mathbb{A}^{n-1}$, где $\pi_p\colon \overline{X} \to \mathbb{P}^{n-1}$ — проекция из точки $p \notin \overline{X}$, мы видим, что $\varphi(X) = Y$ замкнуто в $\mathbb{A}^{n-1}$. Наконец, вложение колец $\varphi^*\colon k[Y] \to k[X]$ является целым расширением: x_n порождает $k[X]$ как кольцо над $\varphi^* k[Y]$, и формула (5.5) показывает, что x_n цело над $k[Y]$, поскольку f равно нулю в $k[X]$. $\square$