# Лекция 6. Размерность (окончание)

Докажем основной технический результат, ради которого мы и обратились к понятию конечного морфизма.

**Теорема 6.1 (теорема о главном идеале).** *Пусть $X$ — алгебраическое многообразие, $\dim X = d$, и $f$ — регулярная функция на $X$. Если множество нулей $f$ непусто и не совпадает со всем $X$, то каждая его неприводимая компонента имеет размерность $d-1$.*

В доказательстве мы воспользуется понятием нормы из теории полей (а также в какой-то мере проясним ее геометрический смысл). Напомним определение и основные свойства нормы (подробности — в книге Ван дер Вардена «Алгебра», § 47 и в одноименной книге Ленга, гл. VIII, § 5).

Пусть $L \supset K$ — конечное расширение полей, $x \in L$. Если рассматривать $L$ как векторное пространство над $K$, а умножение на $x$ — как линейный оператор в этом пространстве, то нормой $x$ называется определитель этого оператора; норма обозначается $N_{L/K}(x) \in K$. Нам будут нужны такие свойства нормы:

1) если $x^d + a_1x_{d-1} + \dots + a_d = 0$ — минимальное уравнение $x$ над $K$ со старшим коэффициентом единица, то $N_{L/K}(x)$ совпадает, с точностью до знака, с $a_d^{[L:K(x)]}$;

2) если $x = x_1, \dots, x_m$ — всевозможные сопряженные с $x$ над $K$, то $N_{L/K}(x) = (x_1 \dots x_m)^r$ для некоторого натурального числа $r$.

*Доказательство теоремы.* Рассматривая аффинное открытое покрытие, видим, что дело сводится к случаю, когда $X$ аффинно, что и будем далее предполагать. Если $X = \mathbb{A}^d$, то все просто: пусть $f = \prod f_i^{r_i}$ — разложение многочлена $f$ в произведение неприводимых, тогда компоненты $V(f)$ имеют вид $V(f_i)$, и каждая из них имеет размерность $d-1$ по предложению 5.3.

Общий случай сводится к разобранному с помощью теоремы о нормализации. Это делается так. Пусть $Z = V(f) \subset X$, и пусть $Z = Z_1 \cup \dots \cup Z_r$ — разложение $Z$ на неприводимые компоненты. Для каждой $Z_i$ можно найти такое аффинное открытое подмножество $U_i \subset X$, что $Z \cap U_i = Z_i \cap U_i \neq \varnothing$. Поэтому достаточно доказать теорему для случая, когда $Z$ неприводимо, что мы и будем теперь предполагать. Пусть $\varphi\colon X \to \mathbb{A}^d$ — конечный сюръективный морфизм. Положим $A = k[\mathbb{A}^d]$, $K = k(\mathbb{A}^d)$, $B = k[X]$, $L = k(X)$. Отождествим $A$ и $K$ с их образами в

$B$ и $L$ относительно $\varphi^*$. Пусть $N_{L/K}\colon L \to K$ — отображение нормы. Положим $g = N_{L/K}(f)$. Ниже мы установим, что $g \in A$ и $\varphi(Z) = V(g)$. Из этих двух утверждений все немедленно следует. В самом деле, ограничение $\varphi|_Z$ является конечным сюръективным морфизмом $Z$ на $V(g)$, откуда $\dim Z = \dim V(g)$, но $\dim V(g) = d - 1$ в силу предложения 5.3. Осталось доказать эти два утверждения. Первое из них вытекает из такой леммы:

**Лемма 6.2.** *$N_{L/K}(B) \subset A$.*

*Доказательство леммы.* Пусть $h \in B$, и пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ — всевозможные вложения $L$ в $\overline{K}$ над $K$. Действуя с помощью $\sigma_j$ на целое уравнение для $h$ над $A$, мы получаем целое уравнение для $\sigma_j(h)$ над $A$, так что все $\sigma_j(h)$ целы над $A$. Следовательно норма $N_{L/K}(h)$, будучи произведением целых над $A$ элементов поля $\overline{K}$, тоже цела над $A$. Поскольку $A$ — кольцо многочленов и тем самым кольцо с однозначным разложением на множители, всякий элемент его поля частных, целый над $A$, сам лежит в $A$, так что включение $N_{L/K}(h) \in A$ доказано. $\square$

Теперь покажем, что $\varphi(Z) = V(g)$. Для этого обозначим $\mathfrak{p} = r(f) \subset A$ (буква $r$ обозначает радикал). Так как $Z$ неприводимо, идеал $\mathfrak{p}$ прост. Имеем $\overline{\varphi(Z)} = V(\mathfrak{p} \cap A)$ (это верно для любого морфизма аффинных многообразий). Из доказательства теоремы Нётер следует, что $\varphi$ – проективный и тем самым замкнутый морфизм (кроме того, любой конечный морфизм замкнут, хотя мы этого и не доказывали). Стало быть, $\overline{\varphi(Z)} = \varphi(Z)$ и $\varphi(Z) = V(\mathfrak{p} \cap A)$. Значит, остается только доказать, что $\mathfrak{p} \cap A = r(g)$.

*Доказательство включения* $\mathfrak{p} \cap A \subset r(g)$. Пусть $h \in \mathfrak{p} \cap A$. Тогда $h \in A$ и $h^m = ff_1$ для некоторого $f_1 \in B$. Взяв норму от обеих частей этого равенства, получим $h^{m[L:K]} = gg_1$, где $g_1 \in A$ по лемме; стало быть, $h \in r(g)$.

*Доказательство включения* $r(g) \subset \mathfrak{p} \cap A$. Покажем, что $g \in \mathfrak{p} \cap A$. В самом деле, пусть минимальное уравнение для $f$ над $K$ имеет вид

$$f^m + a_1 f^{m-1} + \dots + a_m = 0. \tag{6.1}$$

Рассуждая как в доказательстве леммы, получаем, что все $a_j$ лежат в $A$. Тогда из (6.1) видим, что $a_m \in (f) \subset \mathfrak{p}$, то есть $a_m \in \mathfrak{p} \cap A$. Так как $g = N_{L/K}(f) = \pm a_m^s$ для некоторого $s \geqslant 1$, включение $g \in \mathfrak{p} \cap A$ доказано. Если теперь $h \in r(g)$, то есть $h^l = gg_1$ для некоторого $g_1 \in A$, и по доказанному $h^l \in \mathfrak{p}$, откуда, в силу простоты $\mathfrak{p}$, $h \in \mathfrak{p} \cap A$. Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Теперь основные технические трудности остались позади и можно приступать к сбору урожая. Начнем с теорем о размерности пересечения в аффинном и проективном пространствах.

**Теорема 6.3.** *Пусть $X$ и $Y$ — замкнутые неприводимые подмножества аффинного пространства $\mathbb{A}^n$. Если пересечение $X \cap Y$ непусто, то каждая его компонента имеет размерность как минимум* $\dim X + \dim Y - n$.

*Доказательство.* В случае, когда $Y \subset \mathbb{A}^n$ — линейное подпространство, все немедленно следует из теоремы о главном идеале. В самом деле, $Y$ тогда является пересечением $n - \dim Y$ гиперплоскостей. Каждая гиперплоскость задается одним уравнением, поэтому теорема о главном идеале показывает, что каждое пересечение с гиперплоскостью уменьшает размерность (каждой компоненты) не более чем на единицу, а пересечение с $Y$ — не более чем на $n - \dim Y$.

Общий случай сводится к разобранному с помощью стандартного приема «редукции к диагонали». Именно, рассмотрим замкнутое подмногообразие $X \times Y \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n = \mathbb{A}^{2n}$, и пусть $\Delta \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ — диагональ. Очевидно, проекция на любой из сомножителей индуцирует изоморфизм $(X \times Y) \cap \Delta$ и $X \cap Y$ (выражаясь аккуратнее, изоморфизм каждой из компонент левой части с соответствующей компонентой правой части). Поскольку $\Delta \subset \mathbb{A}^{2n}$ — линейное подпространство коразмерности $n$, все следует из уже разобранного частного случая. □

*Замечание 6.4.* Доказанная теорема перестанет быть верной, если в ее условии заменить слова «аффинное пространство $\mathbb{A}^n$» на «$n$-мерное аффинное многообразие».

Проективный вариант доказанной теоремы еще приятнее:

**Теорема 6.5.** *Пусть $X$ и $Y$ — замкнутые неприводимые подмножества аффинного пространства $\mathbb{P}^n$. Если* $\dim X + \dim Y - n \geqslant 0$, *то пересечение $X \cap Y$ непусто и каждая его компонента имеет размерность как минимум* $\dim X + \dim Y - n$.

*Доказательство.* Так как проективное пространство покрыто открытыми множествами, изоморфными аффинным пространствам, то ввиду локального характера понятия размерности все будет следовать из теоремы 6.3, как только мы установим непустоту пересечения. Чтобы это сделать, рассмотрим аффинные конусы $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ в $\mathbb{A}^{n+1}$ (напомним, что это подмногообразия в $\mathbb{A}^{n+1}$ с неоднородными координатами

$X_0, \dots, X_n$, заданные теми же уравнениями, что $X$ и $Y$). Размерности $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ равны $\dim X+1$ и $\dim Y+1$ соответственно (доказательство: можно считать, что однородная координата $x_0$ не является тождественным нулем на $X$; тогда отображение $(x_0, x_1, \dots x_n) \mapsto (x_0, (x_0 : \dots : x_n))$ задает бирациональный изоморфизм между $\hat{X}$ и $\mathbb{A}^1 \times X$). Наконец, $\hat{X} \cap \hat{Y} \neq \varnothing$, поскольку начало координат в этом пересечении заведомо содержится. Следовательно, по теореме 6.3 имеем

$$\dim(\hat{X} \cap \hat{Y}) \geqslant (\dim X+1)+(\dim Y+1)-(n+1) = \dim X+\dim Y-n+1 > 0.$$

Значит, $\hat{X} \cap \hat{Y}$ содержит точки, отличные от начала координат, то есть $X \cap Y \neq \varnothing$. Доказательство закончено. □

Теперь дадим еще одно определение размерности, геометрически более наглядное.

**Определение 6.6.** *Размерностью Крулля* алгебраического многообразия $X$ называется максимальное целое число $d$, для которого существует цепочка неприводимых замкнутых подмножеств $X$

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_d, \tag{6.2}$$

где все включения строгие. Размерность Крулля многообразия $X$ обозначается $\operatorname{Krull}\dim X$.

Это определение как таковое можно было дать прямо на первой лекции, но тогда у нас не хватало техники, чтобы что-нибудь про него доказывать. Зато теперь мы можем доказать, что размерность Крулля совпадает со степенью трансцендентности поля функций (и тем самым выяснить геометрический смысл $\dim X$).

**Предложение 6.7.** $\operatorname{Krull}\dim X = \dim X$ *для любого алгебраического многообразия $X$.*

*Доказательство.* Сначала проверим, что $\operatorname{Krull}\dim X \leqslant \dim X$. Для этого заметим, что, согласно предложению 5.2, размерность уменьшается при переходе к замкнутому непроводимому подмножеству. Поэтому во всякой цепочке (6.2) имеем

$$\dim X_0 < \dim X_1 < \dots < \dim X_d \leqslant \dim X,$$

откуда $d \leqslant \dim X$. Чтобы доказать обратное неравенство $\dim X \leqslant \operatorname{Krull}\dim X$, достаточно для каждого многообразия $X$ построить цепочку (6.2), в которой $X_d = X$ и $\dim X_j = j$ для всех $j$. Переходя к аффинной окрестности, видим, что можно считать $X$ неприводимым замкнутым подмножеством аффинного пространства $\mathbb{A}^n$; пусть $\dim X = d$. Положим $X_d = X$; проведем через какую-то точку $x \in X$ гиперплоскость $H \subset \mathbb{A}^n$, не содержащую целиком $X$. По теореме о главном идеале каждая компонента $X \cap H$ имеет размерность $d - 1$; выберем любую из них и обозначим ее $X_{d-1}$. Теперь применим ту же конструкцию к $X_{d-1}$, и т. д. На финише получится искомая цепочка. $\square$

Следующая теорема, известная под названием «принцип счета констант» или «теорема о размерности слоев», является, пожалуй, самым полезным на практике результатом из теории размерности.

**Теорема 6.8.** *Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — сюръективный морфизм алгебраических многообразий. Тогда:*

1) *Для всякой точки $y \in Y$ все компоненты слоя $\varphi^{-1}(y)$ имеют размерность не менее $\dim X - \dim Y$.*

2) *Для почти всех $y \in Y$ (точная формулировка: для всех $y$, лежащих в некотором непустом открытом подмножестве $U \subset Y$) все компоненты слоя $\varphi^{-1}(y)$ имеют размерность в точности $\dim X - \dim Y$.*

*Доказательство первого утверждения.* Переходя к окрестности точки $y \in Y$, можно считать $Y$ аффинным. Пусть $Y$ реализовано как замкнутое подмножество в $\mathbb{A}^n$ и пусть $\dim Y = d$. Проведем через $y$ гиперплоскость $H_1 \subset \mathbb{A}^n$, не содержащую целиком $Y$. По теореме о главном идеале каждая компонента $Y \cap H_1$ имеет размерность $d-1$. Теперь проведем через $y$ гиперплоскость $H_2$, не содержащую целиком ни одной компоненты $Y \cap H_1$; по той же теореме каждая компонента $Y \cap H_1 \cap H_2$ имеет размерность $d-2$. Проведем эту процедуру $d$ раз: получится, что все компоненты $X \cap H_1 \cap \dots \cap H_d$ нульмерны, то есть являются точками. Пусть $l_i \in k[Y]$ — ограничение на $Y$ линейной функции, задающей $H_i$, и пусть $f_i = l_i \circ \varphi \in k[X]$. Очевидно, множество $Z = V(f_1) \cap \dots \cap V(f_d)$ является объединением слоев $\varphi$ над точками из конечного множества $X \cap H_1 \cap \dots \cap H_d$. Применяя $d$ раз теорему о главном идеале, получаем, что все компоненты множества $Z$ имеют размерность не менее $\dim X - d$; в частности, таковы и все компоненты слоя над $y$. Все доказано. $\square$

Доказательство второго утверждения теоремы более кропотливо. Начнем с простой леммы.

**Лемма 6.9.** *Если $\varphi\colon X \to Y$ — доминантный морфизм многообразий одной размерности, то для некоторого открытого множества $U \subset X$ ограничение $\varphi$ на $\varphi^{-1}(U)$ является конечным морфизмом на $U$ (в частности, слои $\varphi$ над точками $y \in Y$ конечны).*

*Доказательство леммы.* Перейдя к открытым подмножествам, можно считать, что $X$ и $Y$ аффинны. Отождествим $k(Y)$ с подполем в $k(X)$, а $k[Y]$ — с подкольцом в $k[X]$. Кольцо $k[X]$ порождено над $k$ (и тем более над $k[Y]$) конечным числом регулярных функций; обозначим эти функции $f_1, \ldots, f_N$. Поле $k(X)$ алгебраично над $k(Y)$; для каждой из функций $f_j$ выпишем ее уравнение над $k(Y)$ со старшим коэффициентом 1, и пусть $U = D(h) \subset Y$ — аффинное открытое подмножество, на котором определены все рациональные функции-коэффициенты этих уравнений. Пусть $V = \varphi^{-1}(U) = D(\varphi^*(f)) \subset X$. Все ограничения $f_j|_V$ целы над $k[U]$, так что ограничение $\varphi\colon V \to U$ является конечным морфизмом. $\square$

*Доказательство второго утверждения.* Заметим, что аффинным можно считать не только $Y$, но и $X$. В самом деле, если $X = \bigcup_{i=1}^{l} X_i$, где $X_i$ аффинны, и если для каждого $X_i$ найдено такое открытое множество $U_i \subset Y$, что все компоненты $\varphi^{-1}(y) \cap X_i$ имеют размерность $\dim X - \dim Y$ для всех $y \in U_i$, то $U = \bigcap U_i \subset Y$ — искомое открытое подмножество. Итак, считаем $X$ и $Y$ аффинными; пусть $r = \dim X - \dim Y$. Отождествим $k(Y)$ с подполем в $k(X)$, а $k[Y]$ — с подкольцом в $k[X]$. Проведем теперь индукцию по $\dim X$. Если $\dim X = 1$, то доказывать нечего. Пусть теорема доказана для отображений из многообразий размерности $< \dim X$. Выберем среди $f_j$, порождающих $k[X]$, функции $f_1, \ldots, f_r \in k[X]$, образующие базис трансцендентности $k(X)$ над $k(Y)$, и пусть морфизм $\psi\colon X \to Y \times \mathbb{A}^r$ действует по формуле $x \mapsto (\varphi(x); f_1(x), \ldots, f_r(x))$. Из алгебраической независимости $f_j$ очевидно, что морфизм $\psi$ доминантен; в силу леммы 6.9 существует такое открытое подмножество $U \subset Y \times \mathbb{A}^r$, что ограничение $\psi$ на $\psi^{-1}(U)$ является конечным морфизмом на свой образ. Пусть $Z = (Y \times \mathbb{A}^r) \setminus U$, и обозначим через $\pi\colon Y \times \mathbb{A}^r \to Y$ проекцию на первый множитель. Тогда для всякой $y \in Y$ слой $\varphi^{-1}(y)$ совпадает с $\psi^{-1}(\{y\} \times \mathbb{A}^r)$, так что все неприводимые компоненты $\varphi^{-1}(y)$ распадаются на два типа:

1) Замыкания в $X$ компонент $\psi^{-1}(U \cap (\{y\} \times \mathbb{A}^r))$;

2) Компоненты, лежащие в слое над $y$ отображения $\psi^{-1}(Z) \to Y$, являющегося ограничением $\varphi$.

Пусть $\psi^{-1}(Z) = \bigcup Z_i$ — разложение на неприводимые компоненты. Каждое из $Z_i \subset X$ имеет размерность меньше $\dim X$, стало быть, по предположению индукции, для почти всех $y \in Y$ компоненты слоев над $y$ каждого морфизма $\varphi|_{Z_i} \to Y$ имеют размерность $\leqslant \dim Z_j - \dim Y < r$. Из первой части теоремы следует, что компонент с такой размерностью ни в одном слое $\varphi$ быть не может; стало быть, для почти всех $y \in Y$ в слоях $\varphi$ есть только компоненты первого типа. Ввиду конечности $\psi$ над $U$ все эти компоненты имеют размерность не более $r$ (значит, в силу первой части теоремы, ровно $r$), что завершает доказательство второй части и всей теоремы. $\square$

Если морфизм проективен, то можно получить важную дополнительную информацию о поведении размерности слоев. В следующей теореме для произвольных многообразия $X$ и замкнутого подмножества $W \subset X$ мы будем обозначать через $\dim W$ максимум размерностей неприводимых компонент $W$.

**Теорема 6.10.** *Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — проективный сюръективный морфизм. Тогда для всякого натурального числа $r$ множество $Y_r = \{\, y \in Y \mid \dim \varphi^{-1}(y) \geqslant r \,\}$ замкнуто в $Y$. Иными словами, функция $d\colon y \mapsto \dim \varphi^{-1}(y)$ полунепрерывна сверху.*

*Доказательство.* Проведем индукцию по $\dim Y$. Если $Y$ — кривая, то размерность слоя $\varphi$ вообще не может превышать $\dim X - \dim Y = \dim X - 1$, так что наше утверждение верно с очевидностью. Пусть теперь теорема доказана для морфизмов в многообразия размерности $< \dim Y$. Положим

$$Z = \overline{\{\, y \in Y \mid \dim \varphi^{-1}(y) \geqslant \dim X - \dim Y + 1 \,\}}.$$

Покажем, что функция $d$ полунепрерывна сверху на множестве $Z$. В самом деле, достаточно установить полунепрерывность $d$ на каждой из неприводимых компонент множества $Z$. Пусть $Z_0$ — одна из них, и пусть $\varphi^{-1}(Z_0) = W_1 \cup \ldots W_r$ — разложение на неприводимые компоненты. Для $y \in Z_0$ положим $d_j(y) = \dim(\varphi^{-1}(y) \cap W_j)$ (размерность пустого множества считаем равной $-1$). Каждая из функций $d_j$ полунепрерывна сверху. В самом деле, множество $\{\, y \in Z_0 \mid d_j(y) \geqslant 0 \,\}$ совпадает с $\varphi(U_j) = V_j$ и замкнуто в силу проективности морфизма $\varphi$, а множества $\{\, y \in Z_0 \mid d_j(y) \geqslant r \,\}$ при $r > 0$ замкнуты по предположению индукции, примененному к морфизму $\varphi|_{W_j}\colon W_j \to V_j$. Так как каждая из функций $d_j$ полунепрерывна сверху на $Z_0$, то и функция $d(y) = \max_j d_j(y)$ полунепрерывна сверху на $Z_0$, что и требовалось.

Поскольку множество точек $y \in Z$, для которых $d(y) \geqslant \dim X - \dim Y + 1$, плотно в $Z$, а функция $d$ полунепрерывна сверху на $Z$, неравенство $d(y) \geqslant \dim X - \dim Y + 1$ выполнено для *всех* точек $y \in Z$. Стало быть, множество $Y_r$, где $r = \dim X - \dim Y + 1$, совпадает с $Z$ и тем самым замкнуто. Если $r > \dim X - \dim Y + 1$, то множество $Y_r$ содержится в $Z$ и замкнуто в нем в силу полунепрерывности функции $d$ на $Z$, так что и это $Y_r$ замкнуто в $Y$. Если, наконец, $r \leqslant \dim X - \dim Y$, то $Y_r = Y$ по теореме о размерности слоев. Доказательство закончено. $\square$

*Замечание 6.11.* Если не предполагать морфизм $\varphi$ проективным, то доказанная теорема будет неверна.